BULLETIN DE LA S. M. F.

G. KOBB

Sur les surfaces développables

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur les surfaces développables; par M. Gustaf Kobb.

Dans ses travaux sur les équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre, M. Picard a donné une méthode pour reconnaître s'il existe une infinité d'intégrales régulières passant par un contour donné. L'emploi de cette méthode peut être étendu, avec quelques restrictions, aux équations non linéaires. Je veux l'appliquer à une équation non linéaire très simple, savoir

$$rt - s^2 = 0,$$

l'équation bien connue des surfaces développables.

Soit z une intégrale régulière de cette équation passant par un contour fermé donné C, et soit

$$z + \zeta$$

une autre intégrale régulière passant par le même contour. Considérons l'intégrale double

$$\iint \zeta[\varphi(z+\zeta) - \varphi(\zeta)]\, dx\, dy$$
$$\varphi(z) = rt - s^2,$$

l'intégration étant étendue à tous les points de l'aire limitée par la projection sur le plan des xy du contour C.

Cette intégrale double est évidemment nulle. Nous aurons ainsi

$$(1) \qquad \iint \zeta[\varphi(z+\zeta)-\varphi(z)]\,dx\,dy = 0.$$

Il s'agit maintenant de voir si l'équation peut être vérifiée pour des valeurs de ζ qui ne soient pas identiquement nulles. Pour des valeurs de ζ très petites, il suffit de considérer les termes linéaires de la différence

$$\varphi(z+\zeta)-\varphi(z).$$

L'intégrale double (1) deviendra alors

$$(2) \qquad \iint \zeta\left(t\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+r\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-2s\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)dx\,dy.$$

En intégrant par parties, on aura

$$\begin{aligned}\iint t\zeta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\,dx\,dy &= \int_C t\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x}\,dy-\iint\left[t\left(\frac{\partial\zeta}{dx}\right)^2+\frac{\partial t}{\partial x}\,\zeta\,\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right]dx\,dy\\ &= \int_C\left[t\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial t}{\partial x}\,\zeta^2\right]dy-\iint\left[t\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\,\zeta^2\right]dx\,dy;\end{aligned}$$

mais, comme z s'annule au bord du contour C, l'intégrale simple disparaît. On trouve de la même manière

$$\iint r\zeta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\,dx\,dy = -\iint\left[r\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\,\zeta^2\right]dx\,dy$$

$$-\iint 2s\zeta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy = -\iint\left(-2s\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y}\,\zeta^2\right)dx\,dy$$

et, par conséquent, l'intégrale (2) a pour expression

$$-\iint\left[t\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+r\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2-2s\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y}\right)\right]dx\,dy.$$

Or on a

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y}=0.$$

Alors l'intégrale (2) deviendra

$$-\iint\left[t\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+r\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2-2s\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]dx\,dy.$$

On voit immédiatement que le déterminant de la forme quadratique sous le signe $\int$ est nul en vertu de l'équation

$$rt-s^2=0.$$

Par conséquent, la forme quadratique se réduit à un seul carré, qui peut être écrit de deux manières, ou bien

$$\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial\zeta}{\partial y} - s\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2$$

ou bien

$$\frac{1}{t}\left(t\frac{\partial\zeta}{\partial x} - s\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2.$$

Mais pour que l'intégrale double (2) soit nulle, il faut que la forme quadratique soit nulle. Ainsi l'on a

$$r\frac{\partial\zeta}{\partial y} - s\frac{\partial\zeta}{\partial x} = 0,$$

ou

$$t\frac{\partial\zeta}{\partial x} - s\frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0.$$

On voit que chacune de ces équations sera vérifiée, si l'on pose

$$\zeta = f\left(k\frac{\partial z}{\partial x} + k_1\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

ζ doit s'annuler au bord du contour C. On aura ainsi, sur le contour C,

$$0 = f\left(k\frac{\partial z}{\partial x} + k_1\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Mais, pour toute surface développable, on a

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Par conséquent, sur le contour C, on aura

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \text{const.} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \text{const.},$$

ce qui est impossible, si le contour n'est pas une ligne droite. Ainsi, il ne peut pas exister deux intégrales régulières et infiniment voisines de l'équation

$$rt - s^2 = 0,$$

qui passent par le même contour fermé C. On pourrait aussi énoncer ce résultat de la manière suivante : « Par un contour fermé C il ne passe jamais deux surfaces développables, qui n'aient pas de points singuliers et qui soient infiniment voisines l'une de l'autre. »