L. RAFFY

Sur certaines surfaces, dont les rayons de courbure sont liés par une relation

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 158-169
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__158_0>

Sur certaines surfaces dont les rayons de courbure sont liés par une relation; par M. L. Raffy.

1. L'hélicoïde le plus général est représenté par les formules

$$x = \rho \cos\omega, \qquad y = \rho \sin\omega, \qquad z = \varphi(\rho) + h\omega,$$

d'où l'on déduit, en appelant R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux, les deux relations

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\rho^3 \varphi' \varphi'' - h^2}{[\rho^2(1+\varphi'^2) + h^2]^2},$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\rho(\rho^2 + h^2)\varphi'' + [\rho^2(1+\varphi'^2) + 2h^2]\varphi'}{[\rho^2(1+\varphi'^2) + h^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

On voit que les deux rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre. On sait, d'autre part, que tous les hélicoïdes sont applicables sur des surfaces de révolution et que ces deux mêmes propriétés appartiennent aussi aux surfaces à courbure totale constante. Nous allons montrer que, réciproquement, *toute surface applicable sur une surface de révolution, et dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre, est un hélicoïde ou une surface à courbure totale constante,* sauf dans un cas particulier qui sera spécifié (n° 7).

2. Pour exprimer que les deux rayons R_1 et R_2 sont fonctions l'un de l'autre, on peut écrire qu'il existe une relation entre leur somme et leur produit, ou encore entre la courbure moyenne et la courbure totale. Si cette relation ne contient pas la courbure moyenne, la courbure totale est constante. Ce cas signalé et écarté, nous pourrons dire que $R_1 + R_2$ est une fonction de $R_1 R_2$. Or l'élément linéaire de toute surface applicable sur une surface de révolution peut toujours être ramené à la forme

$$ds^2 = W^2(du^2 + dv^2),$$

où W désigne une fonction de v seulement; la courbure totale ne dépend alors que de v. Nous devons donc supposer qu'il en est de même de la courbure moyenne.

Rappelons maintenant les formules de Codazzi. L'élément linéaire étant

$$ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2,$$

les rotations du trièdre formé par la normale à la surface et les tangentes aux courbes coordonnées satisfont aux six équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} Aq_1 + Cp &= 0,\\ -r &= \frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v},\\ r_1 &= \frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u},\end{aligned}\right. \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} &= qr_1 - rq_1,\\ \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} &= rp_1 - pr_1,\\ \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} &= pq_1 - qp_1;\end{aligned}\right\}\quad (2)$$

on a de plus

$$(3)\qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{Ap_1 - Cq}{AC}.$$

3. Introduisons dans les relations (1) et (3) la double hypothèse $A = C = W$; il viendra

$$(1)' \qquad q_1 + p = 0, \qquad r = -\frac{W'}{W}, \qquad r_1 = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{p_1 - q}{W}.$$

Ainsi, la différence $p_1 - q$ est une fonction de v seulement; appelons-la $2V_0$ et posons

$$(5) \qquad p_1 = \mu + V_0, \qquad q = \mu - V_0,$$

en désignant par μ une fonction inconnue de u et de v. Nous avons maintenant à intégrer les équations (2), qui peuvent s'écrire

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial \mu}{\partial u} = pr, \\ &\frac{\partial \mu}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial u} = \mu r + V_0 r + V_0', \\ &p^2 + \mu^2 = V_0^2 - \frac{dr}{dv}. \end{aligned}\right.$$

On est donc conduit à faire un dernier changement de fonction

$$(7) \qquad p = V_1 \cos\tau, \qquad \mu = V_1 \sin\tau,$$

en posant, pour abréger,

$$(8) \qquad V_1 = \sqrt{V_0^2 - \frac{dr}{dv}} = \frac{\sqrt{V_0^2 W^2 - W'^2 + WW''}}{W}.$$

Avec ces notations, le système (6), dont la dernière équation est vérifiée, se réduit aux deux suivantes

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\tau \frac{\partial\tau}{\partial u} + \sin\tau \frac{\partial\tau}{\partial v} = \frac{V_1' - V_1 r}{V_1} \cos\tau, \\ &\sin\tau \frac{\partial\tau}{\partial u} - \cos\tau \frac{\partial\tau}{\partial v} = \frac{V_1' - V_1 r}{V_1} \sin\tau - \frac{V_0' + V_0 r}{V_1}, \end{aligned}\right.$$

si l'on écarte provisoirement l'hypothèse particulière $V_1 = 0$. On déduit de là

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned} &-\frac{\partial\tau}{\partial u} = \frac{V_0' + V_0 r}{V_1} \sin\tau - \frac{V_1' - V_1 r}{V_1}, \\ &\frac{\partial\tau}{\partial v} = \frac{V_0' + V_0 r}{V_1} \cos\tau; \end{aligned}\right.$$

d'où, égalant les deux expressions de τ''_{uv}, on conclut

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{V'_0+V_0 r}{V_1}\right)^2-\frac{d}{dv}\,\frac{V'_1-V_1 r}{V_1}\\
&\qquad=\left[\frac{V'_0+V_0 r}{V_1}\,\frac{V'_1-V_1 r}{V_1}-\frac{d}{dv}\,\frac{V'_0+V_0 r}{V_1}\right]\sin\tau.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous avons ici deux cas à distinguer suivant que l'équation (10) détermine $\sin\tau$ ou se réduit à une identité.

4. Premier cas. — *L'équation* (10) *détermine* $\sin\tau$. Alors τ est une fonction de la seule variable v; en vertu des formules (7), (5) et (1)', les six rotations p, q, r, p_1, q_1, r_1 ne dépendent également que de v. Nous allons prouver que :

Si une surface a pour élément linéaire

$$ds^2 = W^2(du^2+dv^2),$$

W *désignant une fonction de* v, *et si les rotations du trièdre dont deux arêtes sont les tangentes aux courbes* $u=$ const., $v=$ const. *ne dépendent que de* v, *cette surface est un hélicoïde.*

En effet, les rotations ne dépendant que de v, les formules de Codazzi (second groupe) deviennent

$$
(2)'\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dp}{dv} &= qr_1-rq_1,\\
\frac{dq}{dv} &= rp_1-pr_1,\\
\frac{dr}{dv} &= pq_1-qp_1.
\end{aligned}
\right.
$$

On en déduit [1]

$$p^2+q^2+r^2=\text{const.}=l^2,$$

et les trois angles d'Euler peuvent s'exprimer comme suit :

$$-\sin\theta\sin\varphi=\frac{p}{l},\qquad -\sin\theta\cos\varphi=\frac{q}{l},\qquad \cos\theta=\frac{r}{l},\qquad \psi=V-lu,$$

V représentant l'intégrale

$$-l\int\frac{pp_1+qq_1}{l^2-r^2}\,dv.$$

[1] Darboux, *Théorie des surfaces*, t. I, p. 52.

Les neuf cosinus des trois arêtes du trièdre sont donc connus par les formules d'Euler. Les coordonnées X, Y, Z des points de la surface s'expriment au moyen de ces neuf cosinus et des translations par les formules

$$\frac{\partial X}{\partial u} = a\xi + b\eta, \qquad \frac{\partial Y}{\partial u} = a'\xi + b'\eta, \qquad \frac{\partial Z}{\partial u} = a''\xi + b''\eta,$$
$$\frac{\partial X}{\partial v} = a\xi_1 + b\eta_1, \qquad \frac{\partial Y}{\partial v} = a'\xi_1 + b'\eta_1, \qquad \frac{\partial Z}{\partial v} = a''\xi_1 + b''\eta_1.$$

Mais, d'après les hypothèses faites sur l'élément linéaire et sur le trièdre, on a

$$\xi = W, \qquad \xi_1 = \eta = 0, \qquad \eta_1 = W;$$

en sorte qu'il vient

$$\frac{\partial X}{\partial u} = aW, \qquad \frac{\partial Y}{\partial u} = a'W, \qquad \frac{\partial Z}{\partial u} = a''W,$$
$$\frac{\partial X}{\partial v} = bW, \qquad \frac{\partial Y}{\partial v} = b'W, \qquad \frac{\partial Z}{\partial v} = b''W.$$

Enfin rappelons que, en vertu de nos hypothèses, les formules de Codazzi (premier groupe) deviennent

$$(1)' \qquad q_1 + p = 0, \qquad r = -\frac{W'}{W}, \qquad r_1 = 0;$$

par suite, la première des relations $(2)'$ donne

$$Wp = \text{const.} = hl^2.$$

5. Cela posé, reportons-nous aux formules d'Euler

$$\begin{aligned}
a &= \cos\theta \sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi, \\
b &= \cos\theta \cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi, \\
c &= \sin\theta \sin\psi, \\
a' &= \cos\theta \sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi, \\
b' &= \cos\theta \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi, \\
c' &= \sin\theta \cos\psi, \\
-a'' &= \sin\theta \sin\varphi. \\
-b'' &= \sin\theta \cos\varphi, \\
c'' &= \cos\theta,
\end{aligned}$$

et remplaçons-y les angles θ, φ, ψ par leurs expressions données plus haut. Nous trouvons

$$a = V_1 \cos lu - V_2 \sin lu, \qquad b = V_3 \cos lu - V_4 \sin lu,$$
$$a' = V_2 \cos lu + V_1 \sin lu, \qquad b' = V_4 \cos lu + V_3 \sin lu,$$
$$a'' = \frac{p}{l}, \qquad b'' = \frac{q}{l},$$

en posant, pour abréger,

$$V_1 = \frac{pr \sin V}{l\sqrt{p^2+q^2}} + \frac{q \cos V}{\sqrt{p^2+q^2}}, \qquad V_2 = \frac{pr \cos V}{l\sqrt{p^2+q^2}} - \frac{q \sin V}{\sqrt{p^2+q^2}},$$
$$V_3 = \frac{qr \sin V}{l\sqrt{p^2+q^2}} - \frac{p \cos V}{\sqrt{p^2+q^2}}, \qquad V_4 = \frac{qr \cos V}{l\sqrt{p^2+q^2}} + \frac{p \sin V}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Nous connaissons maintenant les différentielles totales des trois coordonnées

$$dX = W(V_1 \cos lu - V_2 \sin lu)\, du + W(V_3 \cos lu - V_4 \sin lu)\, dv,$$
$$dY = W(V_2 \cos lu + V_1 \sin lu)\, du + W(V_4 \cos lu + V_3 \sin lu)\, dv,$$
$$dZ = \frac{W}{l}(p\, du + q\, dv) = hl\, du + \frac{Wq}{l}\, dv.$$

L'intégration donne, en négligeant des constantes additives,

$$X = \frac{WV_1}{l} \sin lu + \frac{WV_2}{l} \cos lu,$$
$$Y = \frac{WV_2}{l} \sin lu - \frac{WV_1}{l} \cos lu,$$
$$Z = hlu + \frac{1}{l}\int W q\, dv.$$

Ces formules peuvent s'écrire, en désignant par W_0, W_1, W_2 trois fonctions de v,

$$X = W_0 \cos(W_1 + lu), \quad Y = W_0 \sin(W_1 + lu), \quad Z = h(W_1 + lu) + W_2;$$

elles représentent des hélicoïdes, qui dépendent de deux paramètres h et l, conformément au théorème de Bour.

6. *Remarque.* — Nous avons négligé (n° 3) l'hypothèse

$$V_0^2 = \frac{dr}{dv}, \tag{11}$$

qui, en vertu des équations (6), entraîne

$$p = \mu = 0,$$
$$V_0' + V_0 r = 0. \tag{12}$$

Comme r, d'après les formules $(1)'$, est égal à la dérivée logarithmique, changée de signe, de W, cette dernière relation montre que V_0 est proportionnel à W, ou, à cause de l'équation (4), que la courbure moyenne est une constante $\frac{1}{k}$. La fonction W est d'ailleurs déterminée par l'équation du second ordre

$$\frac{W^2}{k^2}+\frac{d}{dv}\frac{W'}{W}=0,$$

qui résulte des équations (11) et (12), et qu'il serait facile d'intégrer. Mais cette équation exprime que la courbure totale est constante et égale à $\frac{1}{k^2}$. Ainsi les deux rayons principaux sont égaux. L'hypothèse négligée ne donnerait donc que des sphères.

7. Second cas. — *L'équation* (10) *est une identité.* — Nous supposons nuls le premier membre et le coefficient de $\sin\tau$. Les deux équations ainsi obtenues

$$\left(\frac{V_0'+V_0 r}{V_1}\right)^2-\frac{d}{dv}\frac{V_1'-V_1 r}{V_1}=0, \tag{13}$$

$$\frac{V_0'+V_0 r}{V_1}\frac{V_1'-V_1 r}{V_1}-\frac{d}{dv}\frac{V_0'+V_0 r}{V_1}=0, \tag{14}$$

déterminent à la fois les fonctions V_0 et W et, par suite, l'élément linéaire proposé. Les surfaces de révolution qui admettent cet élément linéaire ne sont plus, comme dans le premier cas, engendrées par une méridienne arbitraire. Néanmoins il convient de faire voir que les surfaces qui résultent de leur déformation et dont les rayons de courbure sont fonctions l'une de l'autre ne sont pas toutes des hélicoïdes. A cet effet, nous discuterons les équations (13) et (14) et le système (9), en supposant la quantité $V_0'+V_0 r$ d'abord différente de zéro, puis égale à zéro.

8. *Hypothèse I.* — La quantité $V_0'+V_0 r$ n'est pas nulle. — Si nous faisons

$$\frac{V_0'+V_0 r}{V_1}=\sigma, \tag{15}$$

nous pourrons remplacer le système (13) et (14) par celui-ci :

$$\frac{V_1'-V_1 r}{V_1}=\frac{\sigma'}{\sigma},\qquad \sigma\sigma''-\sigma'^2=\sigma^4. \tag{16}$$

La seconde équation s'intègre aisément; on trouve d'abord

$$dv = \frac{d\sigma}{\sigma\sqrt{\sigma^2 + a}},$$

a étant une arbitraire; puis, avec une nouvelle arbitraire v_0,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma &= \frac{2\sqrt{a}}{e^{-\sqrt{a}(v-v_0)} - e^{\sqrt{a}(v-v_0)}},\\ \frac{\sigma'}{\sigma} &= \sqrt{\sigma^2 + a} = \sqrt{a}\,\frac{e^{-\sqrt{a}(v-v_0)} + e^{\sqrt{a}(v-v_0)}}{e^{-\sqrt{a}(v-v_0)} - e^{\sqrt{a}(v-v_0)}}, \end{aligned}\right.$$

si la constante a n'est pas nulle; si $a = 0$, il vient

$$(18)\qquad \sigma = -\frac{1}{v - v_0}, \qquad \frac{\sigma'}{\sigma} = -\frac{1}{v - v_0}.$$

Revenons aux équations (9), maintenant compatibles et qui s'écriront

$$(9)'\quad \left\{\begin{aligned} -\frac{\partial\tau}{\partial u} &= \sigma\sin\tau - \frac{\sigma'}{\sigma},\\ \frac{\partial\tau}{\partial v} &= \sigma\cos\tau. \end{aligned}\right.$$

En y substituant successivement les expressions (17) et (18) de σ, puis intégrant, nous obtenons, abstraction faite d'une constante qui s'ajouterait à u,

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{e^{-\frac{\sqrt{a}}{2}(v-v_0)} + e^{\frac{\sqrt{a}}{2}(v-v_0)}}{e^{-\frac{\sqrt{a}}{2}(v-v_0)} - e^{\frac{\sqrt{a}}{2}(v-v_0)}}\operatorname{tang}\frac{u\sqrt{a}}{2};$$

et, dans le cas où $a = 0$,

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{u}{v - v_0}.$$

De ces formules, on déduit facilement les expressions de p et de μ, ayant

$$p = V_1\cos\tau, \qquad \mu = V_1\sin\tau,$$

puis les autres rotations, ainsi définies,

$$q_1 = -p, \qquad p_1 = \mu + V_0, \qquad q = \mu - V_0, \qquad r_1 = 0, \qquad r = -\frac{W'}{W}.$$

Pour déterminer les fonctions V_0 et W, il faudrait intégrer le système formé par l'équation (15) et la première des équations (61)

$$(19)\qquad \frac{V_0' + V_0 r}{\sqrt{V_0^2 + r'}} = \sigma, \qquad \frac{2 V_0 V_0' - r''}{2(V_0^2 - r')} - r = \frac{\sigma'}{\sigma},$$

dont les seconds membres sont maintenant connus. Les fonctions V_0 et r une fois obtenues, on aurait W par une quadrature, r étant sa dérivée logarithmique changée de signe.

Mais il n'est pas nécessaire d'effectuer cette intégration pour voir que les quatre rotations p, q, p_1, q_1 dépendent à la fois de u et de v. Or on peut établir que pour tout hélicoïde à courbure totale variable, dont l'élément linéaire a été ramené à la forme $W^2(v)(du^2 + dv^2)$, les rotations du trièdre considéré sont des fonctions de v seulement.

D'autre part, on ne peut pas supposer que la courbure totale soit constante; car l'équation

$$\frac{r'}{W^2} = \text{const.},$$

qui exprime cette propriété, est contradictoire avec le système (19) où σ revêt l'une des formes (17) ou (18). C'est ce qu'on vérifierait sans difficulté. En conséquence, les surfaces dont nous venons de nous occuper ne sont pas des hélicoïdes.

9. *Hypothèse II.* — La quantité $V_0' + V_0 r$ est nulle. Nous avons vu (n° 6) que cette hypothèse revient à supposer constante la courbure moyenne

$$\frac{V_0}{W} = \frac{1}{k}.$$

Alors l'équation (14) devient une identité; l'équation (13) donne

$$(13)'\qquad \frac{V_1'}{V_1} - r = \frac{V_1'}{V_1} + \frac{W'}{W} = \text{const.} = \alpha.$$

Nous trouvons ainsi les surfaces à courbure moyenne constante applicables sur des surfaces de révolution dont l'élément linéaire sera déterminé par l'équation (13)'. On en déduit d'abord

$$V_1 W = e^{\alpha(v - v_0)} \qquad (v_0 = \text{const.}),$$

puis, en remplaçant V_1 par son expression actuelle,

$$(20) \qquad W^2\left(\frac{W^2}{k^2}+\frac{d}{dv}\frac{W'}{W}\right)=e^{2\alpha(v-v_0)}.$$

Telle est l'équation qui détermine la fonction W.

Dans l'hypothèse présente, les équations (9) donnent

$$\frac{\partial\tau}{\partial u}=\alpha, \qquad \frac{\partial\tau}{\partial v}=0.$$

On voit que, si α n'est pas nul, on peut prendre $\tau=\alpha u$, et supposer $v_0=0$. Ayant ainsi

$$V_0=\frac{W}{k}, \qquad V_1=\frac{e^{\alpha v}}{W'}, \qquad p=V_1\cos\alpha u, \qquad \mu=V_1\sin\alpha u,$$

nous connaîtrons, grâce aux formules $(1)'$ et (5), les six rotations p, p_1, q, q_1, r, r_1, dont les quatre premières dépendront de u en même temps que de v. Les translations étant connues aussi,

$$\xi=\eta_1=W, \qquad \xi_1=\eta=0,$$

à chaque expression de W vérifiant l'équation

$$W^2\left(\frac{W^2}{k^2}+\frac{d}{dv}\frac{W'}{W}\right)=e^{2\alpha v}$$

correspondra une surface à courbure moyenne constante $\frac{1}{k}$, qui ne sera pas un hélicoïde et qui sera applicable sur des surfaces de révolution à courbure moyenne variable, d'élément linéaire

$$ds^2=W^2(du^2+dv^2).$$

Il convient de remarquer que notre analyse donne toutes les surfaces à courbure moyenne $\frac{1}{k}$ qui sont applicables sur des surfaces de révolution.

10. En supposant $\alpha\neq 0$, nous avons écarté seulement les hélicoïdes, puisqu'ils sont caractérisés par des rotations indépendantes de u. Soit donc maintenant $\alpha=0$; cette supposition ne donne que des hélicoïdes à courbure moyenne constante, puisque les rotations sont fonctions de v seulement, la fonction τ se rédui-

sant à une constante, et elle les donne tous. L'élément linéaire de ces hélicoïdes dépend de l'équation

$$(20)' \qquad W^2\left(\frac{W^2}{k^2}+\frac{d}{dv}\frac{W'}{W}\right)=\text{const.},$$

qui s'intègre par une quadrature elliptique. Connaissant l'élément linéaire, on peut déterminer les surfaces elles-mêmes. On trouve ainsi pour le profil qui les engendre l'équation

$$dz=\frac{(\rho^2+h^2)(\rho^2+C)\,d\rho}{\rho\sqrt{(\rho^2+h^2)[k^2\rho^2-(\rho^2+C)^2]}},$$

où C désigne une constante arbitraire, et h le pas, arbitraire aussi, du mouvement hélicoïdal; k est toujours l'inverse de la courbure moyenne donnée. Nous ne développerons pas ces résultats. Nous allons les retrouver en résolvant un problème plus général.

11. Proposons-nous de *déterminer tous les hélicoïdes dont la courbure totale et la courbure moyenne sont liées par une relation linéaire*. Les surfaces parallèles à un hélicoïde étant elles-mêmes des hélicoïdes, il résulte d'une remarque importante due à M. O. Bonnet (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1853; p. 433) que les hélicoïdes dont la courbure totale et la courbure moyenne sont liées par une relation linéaire se déduisent des hélicoïdes à courbure totale constante, auxquels ils sont parallèles. Il faudrait donc déterminer ceux-ci; mais on peut donner une solution directe du problème. Soient M, N, P trois constantes données et soit

$$\frac{M}{R_1R_2}+N\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+P=0$$

la relation proposée. D'après les formules indiquées au n° 1, la fonction $\varphi(\rho)$ qui définit le profil générateur des hélicoïdes sera déterminée par l'équation différentielle

$$M\,\frac{\rho^3\varphi'\varphi''-h^2}{[\rho^2(1+\varphi'^2)+h^2]^2}+N\,\frac{\rho(\rho^2+h^2)\varphi''+[\rho^2(1+\varphi'^2)+2h^2]\varphi'}{[\rho^2(1+\varphi'^2)+h^2]^{\frac{3}{2}}}+P=0,$$

dont l'intégrale n'apparaît pas immédiatement. Mais on peut remarquer que les coefficients de M et de N ont respectivement pour expressions

$$-\frac{1}{2\rho}\frac{d}{d\rho}\frac{\rho^2}{\rho^2(1+\varphi'^2)+h^2}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\frac{\rho^2\varphi'}{\sqrt{\rho^2(1+\varphi'^2)+h^2}}.$$

Par suite, en intégrant et désignant par Q une constante arbitraire, on aura

$$-\frac{M\rho^2}{\rho^2(1+\varphi'^2)+h^2}+\frac{2N\rho^2\varphi'}{\sqrt{\rho^2(1+\varphi'^2)+h^2}}+P\rho^2+Q=0.$$

Cette équation détermine φ' en fonction de ρ. On est donc ramené à une quadrature. On pourra trouver, en particulier, tous les hélicoïdes à courbure moyenne constante ou à courbure totale constante. Ces deux derniers problèmes dépendent des intégrales elliptiques. La remarque de M. O. Bonnet prouve qu'il en est de même du problème général et détermine le changement de variable et de fonction qui permettrait de le vérifier.