Bulletin de la S. M. F.

X. Antomari

Remarques sur l'intégration des équations aux dérivées partielles

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 154-158
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__154_1>

Remarques sur l'intégration des équations aux dérivées partielles; par M. X. Antomari.

Étant donnée une équation aux dérivées partielles du premier ordre à trois variables

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{1}$$

la méthode de Lagrange et Charpit pour trouver une intégrale complète de cette équation consiste, comme l'on sait, à adjoindre à l'équation proposée une autre équation

$$\Phi(x, y, z, p, q) = 0, \tag{2}$$

telle que, si l'on tire p et q des équations (1) et (2), l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

soit complètement intégrable.

Si l'on pose

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Y, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = Z, \qquad \frac{\partial F}{\partial p} = P, \qquad \frac{\partial F}{\partial q} = Q,$$

on trouve que Φ doit vérifier la relation

$$(3) \quad P\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q\frac{\partial \Phi}{\partial y} + (Pp + Qq)\frac{\partial \Phi}{\partial z} - (X + pZ)\frac{\partial \Phi}{\partial p} - (Y + qZ)\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0.$$

Pour que la relation d'intégrabilité soit satisfaite, il suffit que l'équation (3) soit satisfaite en tenant compte des équations (1) et (2). Il est clair que la condition d'intégrabilité sera satisfaite *a fortiori* si l'équation (3) est vérifiée identiquement.

La fonction F est une intégrale de cette équation. Supposons que Φ soit une autre intégrale; les deux équations

$$F = 0, \qquad \Phi - a = 0,$$

où a désigne une constante arbitraire, déterminent les fonctions p et q d'x, d'y et de z, telles que l'équation

$$(4) \qquad dz = p\,dx + q\,dy$$

soit complètement intégrable, pourvu que F et Φ soient des fonctions distinctes de p et q.

L'intégration de l'équation (4) introduira une nouvelle constante arbitraire b et la fonction z d'x et d'y, ainsi définie, sera une intégrale complète de l'équation proposée.

D'après cela on voit que, pour trouver une intégrale complète de l'équation (1), il faut non seulement trouver une intégrale $\Phi - a = 0$ de l'équation (3), mais aussi pouvoir résoudre les équations $F = 0$ et $\Phi - a = 0$ par rapport à p et à q.

Je me propose de montrer dans cette Note que l'on peut, dans certains cas faciles à prévoir, simplifier la recherche d'une intégrale complète en modifiant légèrement la méthode de Lagrange et Charpit.

Je reprends l'équation (1) et je suppose que l'on puisse, n'importe comment, exprimer p et q en fonction d'x, d'y, de z et d'un paramètre λ. Soient

$$(5) \qquad p = \varphi(x, y, z, \lambda), \qquad q = \psi(x, y, z, \lambda).$$

Dans ces formules je considère λ comme une fonction d'x, d'y

et de z et je détermine cette fonction par la condition que l'équation (4) soit complètement intégrable. La condition d'intégrabilité est

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}+q\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial y}+q\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right]=\frac{\partial\psi}{\partial x}+p\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}+p\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right]$$

et s'écrit, en tenant compte des équations (5)

$$(6)\quad \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\left[\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}+\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right]+\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0.$$

Soit

$$\lambda=\theta(x, y, z, a)$$

une intégrale de cette équation renfermant une constante arbitraire; en portant dans les équations (5), on a des valeurs de p et de q contenant une constante arbitraire, et telles que (4) soit intégrable. L'intégration de cette équation introduira une nouvelle constante arbitraire et la fonction z d'x et d'y, ainsi déterminée, sera une intégrale complète de l'équation proposée.

Il est bon d'observer que l'équation (6) se simplifie si l'on suppose que l'équation (1) soit indépendante de z, car alors on peut supposer que λ ne dépend que de x et de y et l'équation (6) devient

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.$$

Remarquons aussi que l'on pourra, dans certains cas, se dispenser de recourir à l'équation (6), si l'on aperçoit pour λ une valeur conduisant à une combinaison intégrable.

Voici d'ailleurs des cas dans lesquels on pourra appliquer la méthode de Lagrange ainsi modifiée.

Je reprends l'équation (1)

$$F(x, y, z, p, q)=0$$

et je suppose que l'on y considère x, y, z comme fixes, p et q comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans le plan, de sorte que l'équation représente alors une courbe de ce plan. On pourra appliquer la méthode toutes les fois que l'on pourra exprimer les coordonnées d'un point de cette courbe en fonction d'un paramètre. Il en sera ainsi, en particulier, dans le cas où la courbe serait unicursale.

Je vais appliquer à deux exemples :

PREMIER EXEMPLE. — *Trouver toutes les surfaces dont les normales sont divisées en parties proportionnelles par les trois plans coordonnés.*

Les équations d'une normale à l'une de ces surfaces sont

$$X - x + p(Z - z) = 0, \qquad Y - y + q(Z - z) = 0.$$

En faisant $X = 0$ dans la première, et $Y = 0$ dans la deuxième, on en déduit

$$Z = \frac{x + pz}{p}, \qquad Z = \frac{y + qz}{q};$$

et il suffit évidemment d'exprimer que le rapport de ces valeurs de z est constant, ce qui donne

$$q(x + pz) = p(y + qz)k$$

ou

$$(k - 1)pqz + kpy - qx = 0.$$

Si λ désigne un paramètre, cette équation est satisfaite identiquement si l'on prend

$$(k - 1)zp - x \ = k\lambda x,$$
$$(k - 1)zq + ky = -\frac{y}{\lambda}.$$

Si l'on suppose $\lambda = \text{const.}$, on obtient immédiatement une combinaison intégrable

$$(k - 1)z\,dz - x\,dx + ky\,dy = k\lambda x\,dx - \frac{y\,dy}{\lambda}$$

ou bien

$$(1 + k\lambda)x\,dx - \frac{1 + k\lambda}{\lambda}y\,dy - (k - 1)z\,dz = 0,$$

ce qui donne, en intégrant,

$$(1 + k\lambda)x^2 - \frac{1 + k\lambda}{\lambda}y^2 - (k - 1)z^2 = a.$$

On met aisément cette équation sous la forme

$$\frac{x^2}{k\rho + \sigma} + \frac{y^2}{\rho + \sigma} + \frac{z^2}{\sigma} - 1 = 0.$$

DEUXIÈME EXEMPLE. — *Trouver toutes les surfaces telles que, si l'on prend le symétrique par rapport à l'origine du pied de la normale sur le plan des xy, le point ainsi obtenu soit situé sur la trace du plan tangent sur le plan des xy.*

On obtient facilement l'équation

$$z(p^2+q^2)+2px+2qy-z=0,$$

que l'on peut écrire

$$(pz+x)^2+(qz+y)^2=(x^2+y^2+z^2).$$

Sous cette forme elle est satisfaite, identiquement, en posant

$$pz+x=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos\varphi,$$
$$qz+y=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sin\varphi.$$

Si l'on suppose que φ soit un angle constant, on obtient une combinaison intégrable

$$z\,dz+x\,dx+y\,dy=\sqrt{x^2+y^2+z^2}(\cos\varphi\,dx+\sin\varphi\,dy).$$

On en déduit

$$\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\cos\varphi\,dx+\sin\varphi\,dy,$$

et, finalement, l'intégrale complète

$$x^2+y^2+z^2=(x\cos\varphi+y\sin\varphi+h)^2$$

Ces deux exemples m'ont été communiqués par M. Kœnigs.