BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LEMOINE

Sur une transformation relative à la géométrie du triangle

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 133-135
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__133_0>

Sur une transformation relative à la géométrie du triangle;
par M. E. Lemoine.

J'ai donné au Congrès de Limoges (*Association française pour l'avancement des Sciences,* 1890) un grand nombre de formules se rapportant à la Géométrie du triangle. En appelant a, b, c, A, B, C, r, r_a, r_b, r_c, R, p, δ, δ_a, δ_b, δ_c les trois côtés, les trois angles, les rayons des quatre cercles tangents aux trois côtés, le rayon du cercle circonscrit, le demi-périmètre et les quatre quantités, $4R+r$, $4R-r_a$, $4R-r_b$, $4R-r_c$, on a, par exemple,

$$a^2+b^2+c^2 = 2(p^2-r\delta) = 2[(p-a)^2+r_a\delta_a],$$

$$r_a^4+r_b^4+r_c^4 = (\delta^2-2p^2)^2,$$

$$r^4+r_b^4+r_c^4 = [\delta_a^2-2(p-a)^2]^2,$$

$$\Sigma a^3 \cos A = \frac{4pr}{R}(p^2-r\delta-3R^2),$$

$$\Sigma a \cos^2 A = \delta - \frac{p^2(R-r)}{R^2},$$

$$-r\cos^2 A + r_c \cos^2 B + r_b \cos^2 C = \delta_a - \frac{(p-a)^2(R+r_a)}{R^2}, \qquad \ldots.$$

L'emploi de ces formules facilite souvent la résolution de problèmes assez compliqués, et nous allons le montrer à propos de trois théorèmes qui, je crois, n'ont pas encore été remarqués.

Théorème I. — *On donne deux cercles fixes de rayons* R, r *de centres* O, o, *tels qu'il y ait une infinité de triangles* ABC *inscrits au cercle de rayon* R *et circonscrits au cercle de rayon* r; *le lieu des points de* Lemoine K *des triangles* ABC *est une ellipse.*

Posons $\rho = OK$, $\rho' = oK$; on sait que $\overline{Oo}^2 = d^2 = R(R-2r)$. On a

$$\rho^2 = R^2 - \frac{12R^2r^2p^2}{(p^2-r\delta)^2}, \tag{1}$$

$$\rho'^2 = 4Rr^2\frac{p^2(R+r)-r\delta^2}{(p^2-r\delta)^2}. \tag{2}$$

On établit facilement ces formules en se rappelant que si

x, y, z; x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées normales absolues de deux points M et M', on a

$$\overline{MM'}^2 = -\frac{R}{pr}\Sigma a(y_1 - y)(z_1 - z),$$

en employant des identités du genre de celles dont nous venons de signaler l'utilité.

En éliminant p^2 entre les équations (1) et (2), on trouve

$$(3) \qquad 1 = \frac{4r[(R+r)(R^2-\rho^2) - 3R\rho'^2]}{3(R^2-\rho^2+\rho'^2)}.$$

C'est l'équation du lieu de K en coordonnées ρ, ρ', O et o étant les pôles.

Si nous prenons pour axe des x la droite Oo, pour axe des y la perpendiculaire élevée au milieu de Oo, l'abscisse de o étant $\frac{d}{2}$, on a

$$\rho^2 = y^2 + (\tfrac{1}{2}d + x)^2, \qquad \rho'^2 = y^2 + (\tfrac{1}{2}d - x)^2;$$

substituant dans l'équation (3), on trouve, tous calculs faits,

$$\begin{aligned} 4x^2(3R^2 - 2Rr + r^2) + 4y^2 r\delta - 4\,dx(3R - r)(R + r) \\ + d^2(3R^2 + 6Rr + r^2) = 0: \end{aligned}$$

le lieu du point K est donc une ellipse.

Le carré du demi grand axe est dirigé suivant la direction de l'axe des y et a pour valeur

$$\frac{d^4 r}{\delta(3R^2 - 2Rr + r^2)}.$$

Le demi petit axe a pour valeur

$$\frac{d^2 r}{3R^2 - 2Rr + r^2}.$$

Si nous donnions au lieu de o le centre o_a du cercle ex-inscrit tangent à BC, on aurait de même

$$\rho = \mathrm{OK}, \qquad \rho' = o_a\mathrm{K},$$

$$\rho^2 = R^2 - \frac{12R^2 r_a^2(p-a)^2}{[(p-a)^2 + r_a\delta_a]^2},$$

$$\rho'^2 = 4Rr_a\frac{(p-a)^2(R - r_a) + r_a\delta_a^2}{[(p-a)^2 + r_a\delta_a]^2};$$

en éliminant $p - a$, on trouverait l'équation du lieu de K, qui est une hyperbole.

Cette hyperbole est équilatère si $R = 2r_a$.

Théorème II. — *Avec les mêmes données le lieu du point de* Gergonne *du cercle inscrit du triangle* ABC *est une circonférence.*

Soit λ le point de *Gergonne* d'un des triangles ABC.

On trouvera, après quelques calculs,

$$\overline{o\lambda}^2 = \rho'^2 = \frac{r^2}{\delta^2}(\delta^2 - 3p^2),$$

$$\overline{O\lambda}^2 = \rho^2 = R^2 - \frac{4r(R+r)}{\delta^2}p^2;$$

éliminant p on trouve une circonférence.

Si l'on donnait, au lieu du cercle inscrit, le cercle ex-inscrit o_a tangent au côté BC, on trouverait encore une circonférence pour le lieu du point de *Gergonne* de ce cercle ex-inscrit.

Théorème III. — *Le point de* Nagel N *décrit dans les mêmes conditions une circonférence.*

Il suffit, pour le voir, de calculer la distance NO du point N de *Nagel* au centre O du cercle circonscrit; on trouve

$$R - 2r,$$

expression remarquable en elle-même par sa simplicité.

La même méthode s'applique avec succès pour trouver les lieux, trop connus pour nous y arrêter, de l'orthocentre, du centre de gravité, etc.

Remarquons encore ce théorème, dont la démonstration est presque intuitive :

Si O *et* o *sont donnés, les centres des cercles ex-inscrits à tous les triangles* ABC *décrivent la circonférence de rayon* $2R$ *et de centre* O_2 *sur* Oo, *tel que* $oO_2 = 2oO$; *si* O *et* o_a *sont donnés, les centres* o, o_b, o_c *des autres cercles tangents aux trois côtés d'un des triangles* ABC *décrivent la circonférence de rayon* $2R$ *et de centre* O_{2a} *sur* Oo_a, *tel que* $o_aO_{2a} = 2o_aO$.