BULLETIN DE LA S. M. F.

F. CASPARY

Sur les fonctions sphériques

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 11-18
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__11_1>

Sur les fonctions sphériques; par M. F. Caspary.

Dans une lettre que M. Hermite a bien voulu m'adresser, l'illustre géomètre, en généralisant la formule élégante de M. Beltrami

$$(x^2-1)\frac{dP_n}{dx}=\frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n+1}-P_{n-1}),$$

a établi la relation importante

$$(x^2-1)^\nu\frac{d^\nu P_n}{dx^\nu}=A\,P_{n+\nu}+A_1\,P_{n+\nu-1}+\ldots\,A_\nu\,P_{n-\nu},$$

et a exprimé, au moyen d'une formule de Jacobi, les coefficients A, A_1, ..., A_ν sous la forme d'intégrales définies ([1]).

Je me propose, dans cette Note, de généraliser les formules de Jacobi, de M. Beltrami et de M. Hermite, de déduire les valeurs numériques des coefficients A, A_1, ..., A_ν et d'établir, d'une façon tout à fait élémentaire, quelques autres formules qui me paraissent non sans intérêt pour la théorie des fonctions sphériques.

1. Les fonctions sphériques de première espèce, que je désigne par $P_r(x)$ ou plus simplement encore par P_r, sont les coefficients de $\alpha^r(r=1, 2, \ldots)$ dans la série

$$\text{(I)}\qquad T=(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\alpha P_1+\alpha^2 P_2+\ldots+\alpha^n P_n+\ldots.$$

On tire de cette définition, en différentiant par rapport à α et à x ([2]),

$$\text{(II)}\qquad \frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial\alpha}=(x-\alpha)T,$$

$$\text{(III)}\qquad \frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x}=\alpha T,$$

ou

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)\frac{\partial T}{\partial\alpha}=(x-\alpha)T,$$

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)\frac{\partial T}{\partial x}=\alpha T.$$

En égalant dans les deux membres de la première formule les coefficients de α^n et, dans les deux membres de la deuxième formule, les coefficients de α^{n+1}, on obtient

$$(1)\qquad (n+1)P_{n+1}-(2n+1)xP_n+nP_{n-1}=0,$$

$$(2)\qquad P'_{n+1}-2xP'_n+P'_{n-1}=P_n,$$

([1]) Voir HERMITE, *Sur les polynômes de Legendre* (*Journal de M. Kronecker*), t. CVII, p. 80.

([2]) Voir *Journal de M. Kronecker*, t. CVII, p. 137.

où

$$P'_r = \frac{dP_r}{dx}.$$

Si l'on différentie la formule (1) par rapport à x, et si l'on élimine successivement P'_n, P'_{n-1}, P'_{n+1}, on trouve

$$P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1)P_n, \tag{3}$$

$$P'_{n+1} - xP'_n = (n+1)P_n, \tag{4}$$

$$xP'_n - P'_{n-1} = nP_n; \tag{5}$$

et en différentiant ces formules $(\nu - 1)$ fois par rapport à x, on a

$$P^{(\nu)}_{n+1} - P^{(\nu)}_{n-1} = (2n+1)P^{(\nu)}_n, \tag{6}$$

$$P^{(\nu)}_{n+1} - xP^{(\nu)}_n = (n+\nu)P^{(\nu-1)}_n, \tag{7}$$

$$xP^{(\nu)}_n - P^{(\nu)}_{n-1} = (n-\nu+1)P^{(\nu-1)}_n, \tag{8}$$

où

$$P^{(\nu)}_n = \frac{d^\nu P_n}{dx^\nu} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Les formules (7) et (8) fournissent encore les relations

$$(n-\nu+1)P^{(\nu)}_{n+1} - (2n+1)xP^{(\nu)}_n + (n+\nu)P^{(\nu)}_{n-1} = 0, \tag{9}$$

$$P^{(\nu)}_{n+1} - 2xP^{(\nu)}_n + P^{(\nu)}_{n-1} = (2\nu-1)P^{(\nu-1)}_n, \tag{10}$$

dont la dernière découle aussi de la formule

$$\frac{1}{T^2}\frac{\partial^\nu T}{\partial x^\nu} = (2\nu-1)\alpha\frac{\partial^{\nu-1}T}{\partial x^{\nu-1}},$$

qui est elle-même la conséquence immédiate de la relation

$$\frac{\partial^\nu T}{\partial x^\nu} = 1.3.5.7\ldots(2\nu-1)\alpha^\nu T^{2\nu+1}. \tag{IV}$$

2. D'après la formule (II), on a

$$(x-\alpha)\frac{\partial T}{\partial \alpha} = (x-\alpha)^2 T^3;$$

et comme on a aussi identiquement

$$(x-\alpha)^2 = x^2 - 1 + (1 - 2\alpha x + \alpha^2) = (x^2-1) + \frac{1}{T^2},$$

on obtient

$$(x-\alpha)\frac{\partial T}{\partial \alpha} = (x^2-1)T^3 + T,$$

ou, d'après la formule (III),

$$(x^2-1)\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(x-\alpha)\frac{\partial T}{\partial \alpha} - \alpha T.$$

En égalant, dans les deux membres de cette formule, les coefficients de α^n, on trouve

$$(x^2-1)P'_n = n(xP_n - P_{n-1}) \tag{11}$$

et, à cause de la formule (1), on en déduit aussi les relations

$$(x^2-1)P'_n = (n+1)(P_{n+1} - xP_n), \tag{12}$$

$$(x^2-1)P'_n = \frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n+1} - P_{n-1}), \tag{13}$$

dont la dernière est celle de M. Beltrami.

Si l'on différentie cette formule, on en tire, au moyen de la formule (3), l'équation différentielle bien connue

$$\frac{d(x^2-1)P'_n}{dx} = n(n+1)P_n, \tag{14}$$

à laquelle on peut aussi donner la forme

$$(x^2-1)P''_n + 2xP'_n = n(n+1)P_n.$$

Par différentiation, on en tire immédiatement

$$(x^2-1)P_n^{(\mu+2)} + 2(\mu+1)xP_n^{(\mu+1)} = [n(n+1) - \mu(\mu+1)]P_n^{(\mu)},$$

et en multipliant par $(x^2-1)^\mu$, on a

$$(x^2-1)^{\mu+1}P_n^{(\mu+2)} + 2(\mu+1)x(x^2-1)^\mu P_n^{(\mu+1)} = (n-\mu)(n+\mu+1)(x^2-1)^\mu P_n^{(\mu)}$$

ou

$$\frac{d(x^2-1)^{\mu+1}P_n^{(\mu+1)}}{dx} = (n-\mu)(n+\mu+1)(x^2-1)^\mu P_n^{(\mu)} \tag{15}$$

et, par conséquent, plus généralement,

$$(16)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^{\lambda+1}(x^2-1)^{\mu+1}P_n^{(\mu+1)}}{dx^{\lambda+1}} \\ = (n-\mu)\ldots(n-\mu+\lambda)(n+\mu-\lambda+1)\ldots(n+\mu+1)(x^2-1)^{\mu-\lambda}P_n^{(\mu-\lambda)}, \\ \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \mu), \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \end{array}\right.$$

La formule (16) donne naissance à beaucoup de relations dont je vais établir quelques-unes, savoir la généralisation de l'équation différentielle (14), la généralisation de la formule de M. Beltrami et les deux formules importantes que l'on doit à Rodrigues et à Jacobi.

En effet, si l'on pose dans la formule (16) $\lambda + 1 = \mu + 1 = \nu$, on en tire

$$(17) \qquad \frac{d^\nu (x^2 - 1)^\nu P_n^{(\nu)}}{dx^\nu} = (n - \nu + 1)(n - \nu + 2) \ldots (n + \nu) P_n,$$

formule qui représente la généralisation de l'équation différentielle (14).

De plus, si l'on pose $\lambda + 1 = \nu - 1$, $\mu + 1 = \nu$, la formule (16) prend la forme

$$\frac{d^{\nu-1} (x^2 - 1)^\nu P_n^{(\nu)}}{dx^{\nu-1}} = (n - \nu + 1) \ldots (n - 1)(n + 2) \ldots (n + \nu)(x^2 - 1) P'_n,$$

et, d'après la formule de M. Beltrami, on obtient la généralisation suivante de cette relation

$$(18) \qquad \frac{d^{\nu-1} (x^2 - 1)^\nu P_n^{(\nu)}}{dx^{\nu-1}} = \frac{(n - \nu + 1) \ldots (n + \nu)}{2n + 1} (P_{n+1} - P_{n-1}).$$

Pour déduire de la formule (17) l'expression connue de P_n, due à Rodrigues et à Jacobi, j'y pose $\nu = n$. Alors on a

$$\frac{d^n (x^2 - 1)^n P_n^{(n)}}{dx^n} = 1.2.3.\ldots 2n . P_n.$$

Or on déduit de l'expression (IV)

$$P_n^{(n)} = 1.3.5.7 \ldots (2n - 1);$$

donc la dernière formule devient

$$1.2.3 \ldots 2n . P_n = 1.3.5.7 \ldots (2n - 1) \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

ou

$$(19) \qquad P_n = \frac{1}{2^n . 1.2.3.\ldots n} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Au moyen des valeurs de $P_n^{(n)}$ et P_n, que je viens d'établir, la formule (16) fournit enfin, pour $\mu = n - 1$, $\lambda = n - \nu - 1 (\nu < n)$:

$$\frac{d^{n-\nu} (x^2 - 1)^n P_n^{(n)}}{dx^{n-\nu}} = 1.2.3 \ldots (n - \nu)(n + \nu + 1) \ldots 2n (x^2 - 1)^\nu P_n^{(\nu)}$$

ou encore

$$1.3.5\ldots(2n-1)\frac{d^{n-\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n-\nu}} = \frac{1.2.\ldots.2n}{(n-\nu+1)\ldots.(n+\nu)}(x^2-1)^\nu P_n^{(\nu)}$$

ou enfin

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^{n-\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n-\nu}} &= 2^n.1.2.3\ldots n(x^2-1)^\nu P_n^{(\nu)},\\ &= \frac{(x^2-1)^\nu}{(n-\nu+1)\ldots(n+\nu)}\,\frac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{dx^{n+\nu}},\end{aligned}\right.$$

formule qui est due à Jacobi.

3. En différentiant la formule de M. Beltrami $(\nu-1)$ fois par rapport à x, et ayant égard à la formule (9), on obtient

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &(2n+1)(x^2-1)P_n^{(\nu)}\\ &=(n-\nu+1)(n-\nu+2)P_{n+1}^{(\nu-1)}-(n+\nu-1)(n+\nu)P_{n-1}^{(\nu-1)}.\end{aligned}\right.$$

Par conséquent, on a, après quelques calculs simples,

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &(x^2-1)^2P_n^{(\nu)}\\ &=+\frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)(n-\nu+3)(n-\nu+4)}{(2n+1)(2n+3)}P_{n+2}^{(\nu-2)}\\ &\quad-2\frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)(n+\nu-1)(n+\nu)}{(2n-1)(2n+3)}P_n^{(\nu-2)}\\ &\quad+\frac{(n+\nu-3)(n+\nu-2)(n+\nu-1)(n+\nu)}{(2n-1)(2n+1)}P_{n-2}^{(\nu-2)},\end{aligned}\right.$$

formule qui se transforme pour $\nu=2$ en celle qui finit la Note de M. Hermite (*loc. cit.*, p. 83).

En multipliant la formule (22) par (x^2-1), on en déduit, au moyen de la formule (21), la suivante

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &(x^2-1)^3P_n^{(\nu)}\\ &=+\frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)(n-\nu+3)(n-\nu+4)(n-\nu+5)(n-\nu+6)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}P_{n+3}^{(\nu-3)}\\ &\quad-3\frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)(n-\nu+3)(n-\nu+4)}{(2n+1)(2n+5)}\,\frac{(n+\nu-1)(n+\nu)}{2n-1}P_{n+1}^{(\nu-3)}\\ &\quad+3\frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)}{(2n+1)(2n+3)}\,\frac{(n+\nu-3)(n+\nu-2)(n+\nu-1)(n+\nu)}{2n-3}P_{n-1}^{(\nu-3)}\\ &\quad-\frac{(n+\nu-5)(n+\nu-4)(n+n-3)(n+\nu-2)(n+\nu-1)(n+\nu)}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)}P_{n-3}^{(\nu-3)}.\end{aligned}\right.$$

D'une façon analogue, en multipliant la formule (23) par (x^2-1), on obtient, au moyen de la formule (21), la valeur de $(x^2-1)^4 P_n^{(\nu)}$; et en calculant ainsi, de proche en proche, $(x^2-1)^5 P_n^{(\nu)}$, $(x^2-1)^6 P_n^{(\nu)}$, on est conduit enfin à la formule générale

$$(24)\qquad \begin{cases} (x^2-1)^\lambda P_n^{(\nu)} = \sum_\varkappa (-1)^\varkappa \lambda_\varkappa A_{n,\nu}^{\lambda,\varkappa} P_{n+\lambda-2\varkappa}^{(\nu-\lambda)}, \\ (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, \lambda; \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, \nu) \end{cases}$$

où

$$\lambda_0 = 1,$$
$$\lambda_1 = \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_\varkappa = \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-\varkappa+1)}{1.2\ldots\varkappa},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_\lambda = 1;$$

et où

$$A_{n,\nu}^{\lambda,0} = \frac{(n-\nu+1)(n-\nu+2)\ldots(n-\nu+2\lambda)}{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2\lambda-1)},$$

$$A_{n,\nu}^{\lambda,1} = [2(n+\lambda)-3]\frac{(n-\nu+1)\ldots(n-\nu+2\lambda-2)}{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2\lambda-1)}\,\frac{(n+\nu-1)(n+\nu)}{2n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_{n,\nu}^{\lambda,\varkappa} = [2(n+\lambda-2\varkappa)+1]\frac{(n-\nu+1)\ldots(n-\nu+2\lambda-2\varkappa)}{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2\lambda-2\varkappa+1)} \times \frac{(n+\nu-2\varkappa+1)\ldots(n+\nu)}{(2n-2\varkappa+1)\ldots(2n-1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_{n,\nu}^{\lambda,\lambda} = \frac{(n+\nu-2\lambda+1)(n+\nu-2\lambda+2)\ldots(n+\nu)}{(2n+1)(2n-2\lambda+3)(2n-2\lambda+5)\ldots(2n-1)}.$$

Dans le cas particulier où $\lambda=\nu$, les numérateurs des coefficients $A_{n,\nu}^{\lambda,0}$, $A_{n,\nu}^{\lambda,1}$, ..., $A_{n,\nu}^{\lambda,\lambda}$ deviennent égaux entre eux et obtiennent la valeur commune

$$N = (n-\nu+1)(n-\nu+2)\ldots(n+\nu);$$

par conséquent, on tire de la formule (24) la relation due à M. Hermite

$$(25)\qquad (x^2-1)^\nu P_n^{(\nu)} = \sum_\varkappa (-1)^\varkappa \nu_\varkappa A_\varkappa P_{n+\nu-2\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, \nu),$$

et l'on trouve pour les coefficients $A_\varkappa$ les valeurs suivantes

$$A_0 = \frac{N}{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2\nu-1)},$$

$$A_1 = \frac{N(2n+2\nu-3)}{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2\nu-1)}\;\frac{1}{(2n-1)},$$

. . . .

$$A_\varkappa = \frac{N(2n+2\nu-4\varkappa+1)}{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2\nu-2\varkappa+1)}\;\frac{1}{(2n-2\varkappa+1)\ldots(2n-1)},$$

. . . .

$$A_\nu = \frac{N}{(2n+1)}\;\frac{1}{(2n-2\nu+3)(2n-2\nu+5)\ldots(2n-1)}.$$

4. Les fonctions sphériques de seconde espèce $Q_s(y)$ sont définies, d'après M. F. Neumann, par l'intégrale

$$Q_s(y) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_s(x)\,dx}{y-x} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots).$$

Au moyen de cette expression et en ayant égard aux formules (1), (13), (3), (12), on reconnaît aisément (¹) que les relations (1), (3), (12) ne changent pas, si l'on y remplace $P_n(x)$ par $Q_n(y)$. Or les relations (1), (3), (12) entraînent les autres; par conséquent : *Toutes les formules établies dans cette Note subsistent encore si l'on remplace les fonctions sphériques de première espèce* $P_n(x)$ *par les fonctions sphériques de seconde espèce* $Q_n(y)$.

(¹) *Voir* ma Note citée, p. 139.