

BULLETIN DE LA S. M. F.

E. CATALAN

Extrait d'une lettre

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 205-206

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889_17_205_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

Extrait d'une Lettre de M. CATALAN.

Le *Bulletin de la Société mathématique* contient (t. XVI, p. 129) ceci :

« *Tout multiple de 8 est la somme de huit carrés impairs.*

» Il serait intéressant, me semble-t-il, d'en trouver (du théorème) une démonstration élémentaire. »

Vers le 10 janvier, M. Berdellé, *Délégué cantonal à Rioz* (Haute-Saône), m'a communiqué la démonstration demandée, démonstration fort remarquable (¹). Immédiatement, je lui ai adressé la lettre suivante :

« **MONSIEUR,**

» Je vous félicite de votre ingénieuse démonstration, et je vous remercie de me l'avoir communiquée. Elle prouve, une fois de plus, la vérité de cet adage : *les idées simples arrivent en dernier.*

» Sans rien changer au fond de cette démonstration, on peut, me semble-t-il, l'abréger encore, de la manière suivante :

» Soit $8n$ un multiple de 8, autre que zéro. D'après Fermat

$$(1) \quad n - 1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

les carrés pouvant être nuls, en tout ou en partie.

» D'un autre côté, on a l'identité

$$(2) \quad 8x^2 + 2 = (2x + 1)^2 + (2x - 1)^2;$$

d'où résulte

$$8(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 8 = (2a + 1)^2 + (2a - 1)^2 + (2b + 1)^2 + \dots$$

ou, en vertu de l'égalité (1),

$$8n = (2a + 1)^2 + (2a - 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2b - 1)^2 + (2c + 1)^2 + (2c - 1)^2 + (2d + 1)^2 + (2d - 1)^2.$$

C. Q. F. D.

(¹) Page 102 de ce Volume.

» THÉORÈME. — Si un nombre N est la somme de p carrés,
 $8N + 2p$ est la somme de $2p$ carrés impairs.

» Même démonstration.

» Exemple :

$$N = 4^2 + 7^2 + 8^2 + 10^2 + 11^2 = 350.$$

Donc

$$\begin{aligned} 2810 &= 9^2 + 7^2 + 15^2 + 13^2 + 17^2 + 15^2 + 21^2 + 19^2 + 23^2 + 21^2 \\ &= 81 + 49 + 225 + 169 + 289 + 225 + 441 + 361 + 529 + 441. \end{aligned}$$

» Corollaire. — N étant un nombre premier, de la forme
 $4\mu + 1$, $8N + 4$ est la somme de quatre carrés impairs.

» En effet, par un autre théorème de Fermat, N est la somme de deux carrés.

» Soit

$$N = 29 = 5^2 + 2^2.$$

Alors

$$8N + 4 = 236 = 11^2 + 9^2 + 5^2 + 3^2.$$

» REMARQUE (¹). — En général, les carrés impairs considérés sont consécutifs deux à deux (²).

» Je suis, Monsieur, votre bien dévoué Collègue,

» E. CATALAN. »

Liège, 12 janvier 1889.

(¹) Faite par M. Berdellé.

(²) Il peut y avoir exception si $a = 0$ ou $b = 0$, etc.