

BULLETIN DE LA S. M. F.

E. CATALAN

Extrait d'une lettre

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 205-206

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__205_0

© Bulletin de la S. M. F., 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Extrait d'une Lettre de M. CATALAN.

Le *Bulletin de la Société mathématique* contient (t. XVI, p. 129) ceci :

« *Tout multiple de 8 est la somme de huit carrés impairs.*

» Il serait intéressant, me semble-t-il, d'en trouver (du *théorème*) une démonstration élémentaire. »

Vers le 10 janvier, M. Berdellé, *Délégué cantonal à Rios* (Haute-Saône), m'a communiqué la démonstration demandée, démonstration fort remarquable (1). Immédiatement, je lui ai adressé la lettre suivante :

« MONSIEUR,

» Je vous félicite de votre ingénieuse démonstration, et je vous remercie de me l'avoir communiquée. Elle prouve, une fois de plus, la vérité de cet adage : *les idées simples arrivent en dernier.*

» Sans rien changer au fond de cette démonstration, on peut, me semble-t-il, l'abrégier encore, de la manière suivante :

» Soit $8n$ un multiple de 8, autre que zéro. D'après Fermat

$$(1) \quad n - 1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

les carrés pouvant être nuls, en tout ou en partie.

» D'un autre côté, on a l'identité

$$(2) \quad 8x^2 + 2 = (2x + 1)^2 + (2x - 1)^2;$$

d'où résulte

$$8(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 8 = (2a + 1)^2 + (2a - 1)^2 + (2b + 1)^2 + \dots$$

ou, en vertu de l'égalité (1),

$$8n = (2a + 1)^2 + (2a - 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2b - 1)^2 + (2c + 1)^2 \\ + (2c - 1)^2 + (2d + 1)^2 + (2d - 1)^2.$$

C. Q. F. D.

(1) Page 102 de ce Volume.

» THÉORÈME. — Si un nombre N est la somme de p carrés, $8N + 2p$ est la somme de $2p$ carrés impairs.

» Même démonstration.

» Exemple :

$$N = 4^2 + 7^2 + 8^2 + 10^2 + 11^2 = 350.$$

Donc

$$\begin{aligned} 2810 &= 9^2 + 7^2 + 15^2 + 13^2 + 17^2 + 15^2 + 21^2 + 19^2 + 23^2 + 21^2 \\ &= 81 + 49 + 225 + 169 + 289 + 225 + 441 + 361 + 529 + 441. \end{aligned}$$

» Corollaire. — N étant un nombre premier, de la forme $4\mu + 1$, $8N + 4$ est la somme de quatre carrés impairs.

» En effet, par un autre théorème de Fermat, N est la somme de deux carrés.

» Soit

$$N = 29 = 5^2 + 2^2.$$

Alors

$$8N + 4 = 236 = 11^2 + 9^2 + 5^2 + 3^2.$$

» REMARQUE (1). — En général, les carrés impairs considérés sont consécutifs deux à deux (2).

» Je suis, Monsieur, votre bien dévoué Collègue,

» E. CATALAN. »

Liège, 12 janvier 1889.

(1) Faite par M. Berdellé.

(2) Il peut y avoir exception si $a = 0$ ou $b = 0$, etc.