E. CATALAN

Extrait d'une lettre

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 205-206
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__205_0>

Extrait d'une Lettre de M. CATALAN.

Le *Bulletin de la Société mathématique* contient (t. XVI, p. 129) ceci :

« *Tout multiple de* 8 *est la somme de huit carrés impairs.*

» Il serait intéressant, me semble-t-il, d'en trouver (du *théorème*) une démonstration élémentaire. »

Vers le 10 janvier, M. Berdellé, *Délégué cantonal à Rioz* (Haute-Saône), m'a communiqué la démonstration demandée, démonstration fort remarquable ([1]). Immédiatement, je lui ai adressé la lettre suivante :

« MONSIEUR,

» Je vous félicite de votre ingénieuse démonstration, et je vous remercie de me l'avoir communiquée. Elle prouve, une fois de plus, la vérité de cet adage : *les idées simples arrivent en dernier.*

» Sans rien changer au fond de cette démonstration, on peut, me semble-t-il, l'abréger encore, de la manière suivante :

» Soit $8n$ un multiple de 8, autre que zéro. D'après Fermat

$$n - 1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \tag{1}$$

les carrés pouvant être nuls, en tout ou en partie.

» D'un autre côté, on a l'identité

$$8x^2 + 2 = (2x+1)^2 + (2x-1)^2; \tag{2}$$

d'où résulte

$$8(a^2+b^2+c^2+d^2)+8 = (2a+1)^2+(2a-1)^2+(2b+1)^2+\ldots$$

ou, en vertu de l'égalité (1),

$$\begin{aligned}8n = (2a+1)^2+(2a-1)^2+(2b+1)^2+(2b-1)^2+(2c+1)^2\\ +(2c-1)^2+(2d+1)^2+(2d-1)^2.\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

([1]) Page 102 de ce Volume.

» Théorème. — *Si un nombre* N *est la somme de p carrés,* $8N + 2p$ *est la somme de $2p$ carrés impairs.*

» Même démonstration.

» *Exemple :*

$$N = 4^2 + 7^2 + 8^2 + 10^2 + 11^2 = 350.$$

Donc

$$\begin{aligned} 2810 &= 9^2 + 7^2 + 15^2 + 13^2 + 17^2 + 15^2 + 21^2 + 19^2 + 23^2 + 21^2 \\ &= 81 + 49 + 225 + 169 + 289 + 225 + 441 + 361 + 529 + 441. \end{aligned}$$

» *Corollaire.* — N *étant un nombre premier, de la forme* $4\mu + 1$, $8N + 4$ *est la somme de quatre carrés impairs.*

» En effet, par un autre théorème de Fermat, N est la somme de deux carrés.

» Soit

$$N = 29 = 5^2 + 2^2.$$

Alors

$$8N + 4 = 236 = 11^2 + 9^2 + 5^2 + 3^2.$$

» Remarque [1]. — En général, les *carrés impairs* considérés sont consécutifs deux à deux [2].

» Je suis, Monsieur, votre bien dévoué Collègue,

» E. Catalan. »

Liège, 12 janvier 1889.

---

(1) Faite par M. Berdellé.

(2) Il peut y avoir exception si $a = 0$ ou $b = 0$, etc.