Bulletin de la S. M. F.

Laquière

Sur un problème de Géométrie cinématique

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 167-169
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__167_1>

Sur un problème de Géométrie cinématique; par M. LAQUIÈRE.

Dans la séance du 16 juillet 1888, M. Laisant a résolu, par la théorie des équipollences, la question suivante :

Deux mobiles, X, Y, *parcourent leurs trajectoires d'un mouvement uniforme ; déterminer les éléments de la trajectoire du point* Z, *qui divise, proportionnellement aux deux vitesses constantes, la droite qui joint les positions simultanées des deux mobiles.*

La Géométrie infinitésimale fournit facilement les mêmes résultats. Soient XX', YY' deux arcs élémentaires correspondants. Menons XX_1, parallèle à YY' et égal à XX'; le point Z sera l'intersection des deux droites YX et $Y'X_1$. Menons ensuite ZZ', parallèle à X_1X'; on aura la position Z', simultanée de X', Y', par l'intersection de ZZ' avec $Y'X'$.

Donc l'élément de la trajectoire Z est parallèle à X_1X', c'est-à-dire également incliné sur les deux éléments de X et Y. Calculons sa longueur ZZ'. Soient m, n, φ les grandeurs des deux vitesses et leur angle d'inclinaison mutuelle ; on aura les proportions

$$\frac{ZZ'}{X_1X'} = \frac{ZZ'}{2XX'\sin\frac{1}{2}\varphi} = \frac{Z'Y'}{X'Y'} = \frac{Z'Y'}{Z'Y' - Z'X'} = \frac{n}{n-m};$$

d'où

$$\frac{ZZ'(n-m)}{2mn\sin\frac{1}{2}\varphi} = \frac{XX'}{m} = \frac{YY'}{n} = dt.$$

La vitesse du point Z est donc $\frac{2mn\sin\frac{1}{2}\varphi}{n-m}$.

Soient encore R_x, R_y, R_z les rayons de courbure des trajectoires en X, Y, Z, et $d\alpha$, $d\beta$, $d\omega$ les angles de contingence. La direction de ZZ' étant bissectrice (extérieure) des directions XX' et YY',

$$2\,d\omega = d\alpha + d\beta$$

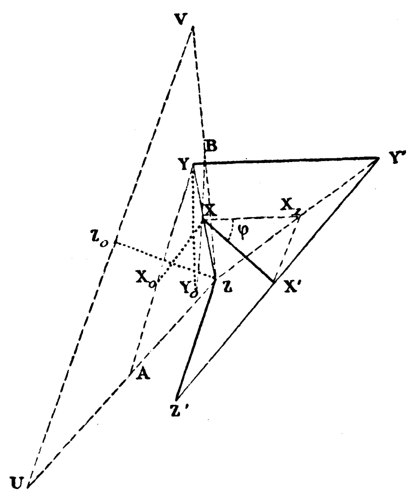
ou bien

$$2\frac{ZZ'}{R_z} = \frac{XX'}{R_x} + \frac{YY'}{R_y};$$

soit, en vertu des proportions ci-dessus,

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}\varphi}{R_z} = \frac{1}{\frac{2n}{n-m}R_x} + \frac{1}{\frac{2m}{n-m}R_y}.$$

La longueur R_z est donc celle de la bissectrice d'un triangle formé par deux côtés de longueur $\frac{2n}{n-m}R_x$, $\frac{2m}{n-m}R_y$, comprenant entre eux l'angle $(180 - \varphi)$, supplémentaire de celui des deux normales XX_0, YY_0. Or la normale ZZ_0 ayant précisément cette direction, le centre de courbure Z_0 sera situé sur la base du triangle UZV construit de la manière suivante :



Joignons par les droites YX_0, XY_0 le point de chacune des trajectoires au centre de courbure de la seconde ; menons par Z les parallèles ZU, ZV, aux normales en X et Y ; elles sont respectivement rencontrées par les droites YX_0, XY_0 en des points A et B, tels que $ZA = \frac{n}{n-m}R_x$; $ZB = \frac{m}{n-m}R_y$.

Prenons $ZU = 2ZA$ et $ZV = 2ZB$, on obtiendra la droite UV, base du triangle dont la bissectrice en Z sera la normale à la courbe Z, et aura pour pied le centre de courbure Z_0.