BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE D'OCAGNE

# Sur les nombres de Bernoulli

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 17 (1889), p. 107-109
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__107_1>

*Sur les nombres de Bernoulli;* par M. MAURICE D'OCAGNE.

Deux Notes récentes ([1]) ayant attiré l'attention de la *Société mathématique* sur les nombres de Bernoulli, je saisirai cette occasion pour rappeler et, en même temps, pour simplifier l'expression générale explicite de ces nombres ([2]) que j'ai donnée dans mon Mémoire : *Sur une classe de nombres remarquables.*

Ces nombres remarquables, que je désigne par la notation $K_m^p$ et que je définis par les relations

$$K_m^1 = 1, \qquad K_m^m = 1,$$
$$K_m^p = p K_{m-1}^p + K_{m-1}^{p-1},$$

relations qui se traduisent par un triangle arithmétique analogue à celui de Pascal, ont l'expression générale suivante, obtenue dans mon Mémoire [formule (5')],

$$(1) \quad K_m^p = \frac{p^m - C_p^1 (p-1)^m + C_p^2 (p-2)^m - \ldots + (-1)^{p-1} C_p^{p-1} 1^m}{1.2.3 \ldots p}.$$

Cela dit, je rappellerai, en quelques mots, la marche que j'ai suivie pour parvenir à la formule qui donne explicitement les nombres de Bernoulli.

Et tout d'abord, la définition de ces nombres à laquelle je me suis conformé est celle qui résulte de la considération du dévelop-

---

([1]) *Bulletin de la Société Mathématique,* t. XVI, pp. 144 et 157.

([2]) *American Journal of Mathematics,* t. IX, p. 380.

pement [1]

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1}x + \frac{B_2}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{B_m}{1.2\ldots m}x^m + \ldots,$$

et qui donne

$$B_0 = 1, \quad B_2 = \tfrac{1}{6}, \quad B_4 = \tfrac{1}{30}, \quad B_6 = \tfrac{1}{42}, \quad B_8 = -\tfrac{1}{30}, \quad \ldots,$$
$$B_1 = \tfrac{1}{2}, \quad B_{2n+1} = 0.$$

Avec cette définition $B_m$ est le coefficient de $p$ dans le développement de $1^m + 2^m + \ldots + p^m$ suivant les puissances de $p$. C'est la remarque sur laquelle je me suis appuyé.

Je vais indiquer maintenant le rapprochement des différents passages de mon Mémoire d'où résulte la démonstration de ma formule.

Je commence par faire voir [n° 14, formule (23)] qu'en posant

$$Y_1 = \frac{d}{dx}xY, \qquad Y_2 = \frac{d}{dx}xY_1, \qquad Y_3 = \frac{d}{dx}xY_2, \qquad \ldots,$$

on a

$$Y_m = K^1_{m+1}Y + K^2_{m+1}xY' + \ldots + K^{m+1}_{m+1}x^m Y^{(m)};$$

puis, appliquant cette formule à la fonction $Y = x^p$, pour laquelle un calcul direct donne $Y_m = (p+1)^m x^p$, j'obtiens [n° 15, formule (24)],

$$(p+1)^m = K^1_{m+1} + A^1_p K^2_{m+1} + \ldots + A^m_p K^{m+1}_{m+1},$$

$A^m_p$ étant le nombre des arrangements de $p$ objets $m$ à $m$. Après remplacement de $m$ par $m-1$, cette formule donne (n° 15)

$$\begin{aligned}
1^{m-1} &= K^1_m,\\
2^{m-1} &= K^1_m + A^1_1 K^2_m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
p^{m-1} &= K^1_m + A^1_{p-1}K^2_m + \ldots + A^{p-1}_{p-1}K^p_m,
\end{aligned}$$

---

[1] Quand on définit les nombres de Bernoulli au moyen du développement

$$\frac{x}{e^x - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1}x + \frac{B_2}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{B_m}{1.2\ldots m}x^m + \ldots,$$

ils ont les mêmes valeurs que ci-dessus, sauf $B_1$ qui est alors égal à $-\frac{1}{2}$. La généralité de la formule (3) de la présente Note est un argument en faveur de la définition ici admise.

Additionnant ces égalités après avoir multiplié la première par 1, la deuxième par 2, ..., la $p^{\text{ième}}$ par $p$, j'ai [n° **27**, formule (47)]

$$1^m + 2^m + \ldots + p^m = 1!\,C_{p+1}^2\,K_m^1 + 2!\,C_{p+1}^3\,K_m^2 + \ldots + p!\,C_{p+1}^{p+1}\,K_m^p.$$

On tire aisément de là, pour le coefficient de $p$, qui est, comme nous l'avons dit, $B_m$ [n° **29**, formule (54)],

$$(2)\qquad B_m = \frac{K_m^1}{2} - \frac{1!\,K_m^2}{3} + \frac{2!\,K_m^3}{4} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{(m-1)!\,K_m^m}{m+1}.$$

Telle est l'expression à laquelle je me suis borné dans mon Mémoire; mais si, tirant maintenant de (1) les valeurs de $K_m^1$, $K_m^2$, ..., $K_m^m$ en fonction de $m$, je porte ces valeurs dans (2), je fais disparaître les nombres particuliers sur les propriétés desquels était basée mon analyse, et j'obtiens, après quelques réductions dont on retrouvera aisément le détail, l'expression suivante, remarquable par sa simplicité,

$$(3)\qquad B_m = \sum_{\mu=1}^{\mu=m}\left[(-1)^{\mu+1}\mu^{m-1}\sum_{\lambda=\mu}^{\lambda=m}\frac{C_{\lambda-1}^{\mu-1}}{\lambda+1}\right],$$

où $C_p^q$ est le nombre des combinaisons de $p$ objets $q$ à $q$. De cette façon, les nombres de Bernoulli se trouvent exprimés, et très simplement, au moyen des coefficients du binôme. Pour $m$ impair, $B_m$ étant nul, la formule (3) donne alors une propriété particulière de ces derniers nombres.