BULLETIN DE LA S. M. F.

R. PERIN

Sur l'identité des péninvariants des formes binaires avec certaines fonctions des dérivées unilatérales de ces formes

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 82-100
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__82_0>

Sur l'identité des péninvariants des formes binaires avec certaines fonctions des dérivées unilatérales de ces formes; par M. R. Perrin.

(Séance du 21 décembre 1887.)

1. Dans un travail récent [1], M. Hilbert a établi que tout covariant ou invariant d'une forme binaire, écrite avec une seule variable non homogène, peut s'exprimer en fonction de cette forme et de ses dérivées unilatérales (c'est-à-dire prises par rapport à cette variable unique); et que, réciproquement, toute fonction homogène et isobarique de la forme et de ses dérivées unilatérales est un invariant ou un covariant de la forme, pourvu qu'elle satisfasse à une certaine équation différentielle.

Cette propriété est particulièrement curieuse en ce qui concerne les invariants, car chaque invariant fournit ainsi une fonction de la forme et de ses dérivées, d'où la variable disparaît d'elle-même. M. Hilbert a, d'ailleurs, indiqué l'existence de théorèmes analogues pour les systèmes de formes binaires, ainsi que pour les formes ternaires, quaternaires, etc. Mais il ne paraît pas avoir remarqué que les *péninvariants,* tant des formes binaires que des formes à un nombre quelconque de variables et des systèmes de formes, jouissent de propriétés tout à fait semblables, ainsi que je me propose de le montrer.

2. Considérons d'abord une forme binaire unique f, écrite sous forme non homogène,

$$(1)\qquad f = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n.$$

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ses dérivées successives. On a identiquement, pour $p = 0, 1, \ldots, n$,

$$(2)\qquad \frac{n!}{p!} a_p = f_{n-p} - \frac{x}{1} f_{n-p+1} + \frac{x^2}{2!} f_{n-p+2} - \ldots + (-1)^p \frac{x^p}{p!} f_n,$$

pourvu que l'on convienne que $f_0 = f$ et $0! = 1$.

[1] *Ueber eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiete* (*Mathematische Annalen*, t. XXX; 1887).

En effet, prenons la dérivée totale du second membre; puisque $f_{n+1} = 0$, les termes obtenus se détruisent deux à deux : ce second membre a donc une valeur indépendante de x, et l'on reconnaît immédiatement, en faisant $x = 0$, que cette valeur est bien $\frac{n!}{p!} a_p$.

Désignons maintenant par $\frac{da_p}{dx}$ la dérivée partielle de a_p, prise en considérant les quantités f comme constantes. La relation identique (2) donne

$$\frac{n!}{p!}\frac{da_p}{dx} = -f_{n-p+1} + \frac{x}{1} f_{n-p+2} - \frac{x^2}{2!} f_{n-p+3} + \ldots = -\frac{n!}{p-1!} a_{p-1},$$

et, par suite,

$$(3)\qquad \frac{da_p}{dx} = -pa_{p-1}.$$

Soit enfin v un péninvariant quelconque de f, écrit en fonction de $a_0, a_1, \ldots, a_n$,

$$v = \varphi(a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Remplaçons dans l'expression de ce péninvariant $a_0, a_1, \ldots, a_n$ par leurs valeurs respectives, tirées de (2), en fonction de x et des f. Je dis que la variable x disparaîtra d'elle-même du résultat. Il suffit, pour l'établir, de montrer que la dérivée partielle de v, prise par rapport à x, en traitant les f comme des constantes, sera identiquement nulle. Or cette dérivée partielle sera évidemment

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d\varphi}{da_0}\frac{da_0}{dx} + \frac{d\varphi}{da_1}\frac{da_1}{dx} + \ldots + \frac{d\varphi}{da_n}\frac{da_n}{dx},$$

ou, en vertu de (3),

$$(4)\qquad \frac{dv}{dx} = -\left(a_0\frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1\frac{d\varphi}{da_2} + 3a_2\frac{d\varphi}{da_3} + \ldots + na_{n-1}\frac{d\varphi}{da_n}\right).$$

Mais l'évanouissement identique du second membre de (4) est précisément la condition nécessaire et suffisante pour que φ (supposée, bien entendu, homogène et isobarique) soit un péninvariant de f.

Dès que x doit disparaître du résultat, il est clair qu'on obtiendra l'expression du péninvariant v en fonction de $f, f_1, \ldots, f_n$, en remplaçant simplement dans φ chaque coefficient a_p par le premier terme de sa valeur tirée de (2), c'est-à-dire par $\frac{p!}{n!} f_{n-p}$.

Dès lors, l'équation différentielle

$$(5)\qquad a_0\frac{d}{da_1}+2a_1\frac{d}{da_2}+\ldots+na_{n-1}\frac{d}{da_n}=0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{d\zeta}=0,$$

qui définit les péninvariants comme fonctions de $a_0, a_1, \ldots,$ devient, lorsqu'on les regarde comme fonctions de $f, f_1, \ldots,$

$$(6)\qquad f_1\frac{d}{df}+f_2\frac{d}{df_1}+f_3\frac{d}{df_2}+\ldots+f_n\frac{d}{df_{n-1}}=0.$$

Réciproquement, si une fonction homogène et isobarique $\psi(f, f_1, \ldots, f_n)$ satisfait à la condition (6), la fonction des a, obtenue en remplaçant f_p par $\frac{n!}{n-p!}a_{n-p}$, satisfera à la condition (5) et sera, par suite, un péninvariant de f, et ce péninvariant donnera bien ψ lorsqu'on y remplacera les a par leurs valeurs complètes (2) en fonction des f et des x. Nous pouvons donc dire :

THÉORÈME I. — *Tout péninvariant (coefficient de la plus haute puissance de x dans un covariant) ou invariant d'une forme binaire f est identique à une fonction de f et de ses dérivées unilatérales $f_1, f_2, \ldots, f_n$ (c'est-à-dire prises par rapport à la seule variable x), satisfaisant à l'équation* (6); *et, réciproquement, toute fonction homogène et isobarique de f et de ses dérivées par rapport à x qui satisfait à l'équation* (6) *est identique à un péninvariant ou à un invariant de f. Le passage d'une expression à l'autre s'obtient en échangeant a_p et $\frac{p!}{n!}f_{n-p}$.*

3. Si, au lieu d'un péninvariant, nous avions pris un covariant

$$w=\varphi(x, a_0, a_1, \ldots, a_n),$$

nous aurions été conduit, en suivant la même marche, à la relation

$$(7)\qquad \frac{dw}{dx}=\frac{d\varphi}{dx}-\left(a_0\frac{d\varphi}{da_1}+2a_1\frac{d\varphi}{da_2}+\ldots+na_{n-1}\frac{d\varphi}{da_n}\right),$$

au lieu de la relation (4), $\frac{d\varphi}{dx}$ étant la dérivée partielle de φ par rapport à x, prise en traitant les a comme des constantes. Mais, en vertu de la propriété bien connue que M. Cayley a même adoptée comme définition des covariants, le second membre de (7) est identiquement nul : w ne contiendra donc explicitement que $f, f_1, \ldots, f_n$, et non plus x. Dès lors, pour obtenir l'expression d'un covariant en fonction des f, il suffit d'y supposer $x = 0$, ce qui le réduit à son dernier terme, et de remplacer a_p par $\frac{p!}{n!} f_{n-p}$; comme le dernier terme se déduit lui-même du péninvariant, source du covariant considéré, par la permutation de a_0 avec a_n, a_1 avec a_{n-1}, ... (au signe près, toutefois, s'il s'agit d'un covariant gauche), il suffit, en définitive, de prendre le péninvariant, source du covariant, et d'y remplacer a_p par $\frac{n-p!}{n!} f_p$. L'équation différentielle (5), à laquelle satisfait ce péninvariant, devient, par l'effet de cette substitution,

$$(8) \quad nf\frac{d}{df_1} + 2(n-1)f_1\frac{d}{df_2} + 3(n-2)f_2\frac{d}{df_3} + \ldots + nf_{n-1}\frac{d}{df_n} = 0.$$

Telle est bien effectivement, en tenant compte de la différence des notations, la relation trouvée par M. Hilbert comme condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction homogène et isobarique de f et de ses dérivées unilatérales soit un covariant de f

On peut réunir, dans l'énoncé très simple que voici, le résultat de M. Hilbert et celui que nous avons obtenu plus haut :

Théorème II. — *Si, dans un péninvariant de la forme binaire f, on remplace chaque coefficient a_p par $\frac{p!}{n!} f_{n-p}$, on obtient l'expression de ce péninvariant en fonction de f et de ses dérivées unilatérales $f_1, f_2, \ldots, f_n$; cette expression satisfait à l'équation* (6). *Si l'on remplace, au contraire, chaque coefficient a_p par $\frac{n-p!}{n!} f_p$, on obtient* (*au signe près*) *l'expression en fonction de f et de ses dérivées unilatérales du covariant* complet *dont le péninvariant donné est la source, et cette seconde expression satisfait à l'équation* (8). *Pour un invariant, les deux substitutions conduisent au même résultat* (*au signe près*), *et l'expression obtenue satisfait à la fois aux équations* (6) *et* (8).

Réciproquement, toute fonction homogène et isobarique de f et de ses dérivées unilatérales est un péninvariant de f, si elle satisfait à la condition (6); *un covariant, si elle satisfait à la* *condition* (8); *un invariant si elle satisfait* à la fois *aux conditions* (6) *et* (8).

4. Considérons maintenant une équation différentielle

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{9}$$

où y est une fonction inconnue de la variable x, laquelle ne figure pas explicitement. Supposons que F satisfasse à la condition (6), c'est-à-dire qu'on ait identiquement

$$y' \frac{dF}{dy} + y'' \frac{dF}{dy'} + \ldots + y^{(n)} \frac{dF}{dy^{(n-1)}} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dF}{d\theta} = 0. \tag{10}$$

Comme, d'autre part, on a, en différentiant (9),

$$y' \frac{dF}{dy} + y'' \frac{dF}{dy'} + \ldots + y^{(n)} \frac{dF}{dy^{(n-1)}} + y^{(n+1)} \frac{dF}{dy^{(n)}} = 0,$$

il vient simplement, en remarquant que F contient $y^{(n)}$ par hypothèse et que $\frac{dF}{dy^{(n)}}$ ne peut donc être nul,

$$y^{(n+1)} = 0,$$

ce qui signifie que y est de la forme parabolique

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n. \tag{11}$$

Mais alors le théorème I nous apprend que F est identique à une fonction des péninvariants de y considérée comme forme binaire, fonction facile à obtenir en remplaçant dans F $y^{(p)}$ par $\frac{n!}{n-p!}\, a_{n-p}$, c'est-à-dire par $p!\, A_p$; il suffit donc d'égaler à zéro cette fonction des péninvariants pour que l'expression (11), où il reste n constantes arbitraires, satisfasse à l'équation (9) et en soit l'intégrale générale. Nous obtenons ainsi ce théorème :

Théorème III. — *Si une équation différentielle d'ordre n,*

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

où la variable ne figure pas explicitement, admet l'intégrale générale parabolique

$$y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n,$$

la relation qui lie les $n+1$ arbitraires est simplement

$$F(A_0, A_1, 2!A_2, 3!A_3, \ldots, n!A_n) = 0.$$

Réciproquement, si dans la forme binaire générale d'ordre n, écrite avec une seule variable non homogène, on suppose donnée une *relation entre les coefficients et qu'on calcule l'équation différentielle du $n^{ième}$ ordre à laquelle satisfait la forme après élimination de tous ses coefficients, la condition nécessaire et suffisante pour que cette équation différentielle ne contienne pas explicitement la variable est que la relation donnée entre les coefficients se réduise à une relation entre des péninvariants (ou invariants) de la forme.*

Il n'est nullement nécessaire que F soit homogène ni isobarique par rapport à y et ses dérivées.

Soit, comme exemple, l'équation différentielle

$$(12) \qquad m(2y''y^{\text{IV}} - y'''^2)^\alpha + p(y''^2 - 2y'y''' + 2yy^{\text{IV}})^\beta + q = 0,$$

où m, p, q, α, β sont des constantes quelconques. Son premier membre satisfait à la condition (10). Elle admet donc pour intégrale générale

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4,$$

les cinq arbitraires a, b, c, d, e étant liées par l'équation

$$(13) \qquad 2^{2\alpha}3^\alpha m(8ce - 3d^2)^\alpha + 2^{2\beta}p(c^2 - 3bd + 12ae)^\beta + q = 0,$$

comme il est d'ailleurs facile de le vérifier directement.

5. Si l'on cherchait à intégrer, par un procédé analogue, une équation différentielle dont le premier membre satisferait non plus à la condition (10), mais à la condition

$$(14) \qquad ny\frac{d}{dy'} + 2(n-1)y'\frac{d}{dy''} + 3(n-2)y''\frac{d}{dy'''} + \ldots = 0,$$

équivalente à (8), pour une certaine valeur de n, on serait conduit à prendre pour intégrale une forme binaire non homogène du $n^{\text{ième}}$ ordre et à écrire $r+1$ relations entre les coefficients de cette forme, r étant l'ordre de celui des covariants qui est de l'ordre le plus élevé parmi ceux dont la somme est identique au premier membre de l'équation différentielle donnée. Le plus souvent donc on n'obtiendrait pas l'intégrale générale; il pourrait même arriver qu'on n'en obtînt aucune.

Soit donnée, par exemple, l'équation différentielle

$$(15) \qquad 3yy'' - 2y'^2 - q = 0,$$

qui ne satisfait pas à la condition (10), mais qui satisfait à la condition (14) pour $n = 3$. Posons donc

$$y = a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3,$$

et exprimons que le covariant de y, qui est identique à $3yy'' - 2y'^2$, est égal à q, quel que soit x. La source de ce covariant s'obtiendra, d'après le théorème II, en remplaçant respectivement y, y', y'' par a_0, $\frac{3!}{2!}a_1$, $\frac{3!}{1!}a_2$, ce qui donne $18(a_0a_2 - a_1^2)$. Ce covariant est donc le hessien, et les relations demandées sont, par suite, au nombre de trois, savoir

$$\begin{aligned} a_0a_2 - a_1^2 &= 0, \\ a_0a_3 - a_1a_2 &= 0, \\ a_1a_3 - a_2^2 &= \tfrac{1}{18}q. \end{aligned}$$

Mais on voit sans peine que, si $q \gtrless 0$, ces trois relations sont incompatibles : il n'existe donc pas d'intégrale de forme parabolique. Si $q = 0$, les trois relations se réduisent à deux, savoir

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \lambda,$$

et l'on obtient l'intégrale

$$y = a_0(x + \lambda)^3,$$

qui renferme deux arbitraires et est bien l'intégrale générale, comme on le savait d'avance.

Soit, au contraire, l'équation différentielle du troisième ordre

$$(16) \qquad 9y^2y''' - 9yy'y'' + 4y'^3 = 0.$$

En appliquant le même procédé, on est conduit à annuler les quatre coefficients du covariant cubique de la forme générale du troisième ordre; d'où quatre conditions qui se réduisent à deux, et l'on arrive finalement à la même intégrale que pour l'équation précédente; seulement, ici ce n'est plus qu'une intégrale particulière à deux constantes arbitraires. Et, en effet, l'intégrale générale serait

$$y = (ax^2 + bx + c)^{\frac{3}{2}}$$

et l'intégrale particulière trouvée correspond au cas où $b^2 = 4ac$.

Il existe d'ailleurs des équations différentielles dont le premier membre (ne contenant pas la variable) satisfait à la condition (14) pour une valeur fractionnaire ou négative de n et dont l'intégrale générale peut être obtenue en posant $y = z^\alpha$ et disposant convenablement de α. Ainsi, l'équation différentielle des coniques

$$(17) \qquad 9y''^2 y^{\mathrm{v}} - 45 y'' y''' y^{\mathrm{iv}} + 40 y'''^3 = 0,$$

lorsqu'on y regarde y'' comme la fonction cherchée, satisfait à la condition (14) pour $n = -3$, et s'intègre en posant $y'' = z^{-\frac{3}{2}}$, z étant un polynôme arbitraire du second degré en x. Ainsi encore l'équation

$$(18) \qquad yy^{\mathrm{iv}} + 4y'y''' + 3y''^2 = 0$$

satisfait à la condition (14) pour $n = \frac{3}{2}$ et s'intègre en posant $y = z^{\frac{1}{2}}$, z étant un polynôme arbitraire du troisième degré en x; cette équation différentielle est celle des cubiques qui admettent l'axe des x pour axe de symétrie.

Mais ce sujet nous entraînerait trop loin et demande une étude spéciale.

6. Outre les covariants, invariants et péninvariants, il existe encore d'autres fonctions des coefficients et de la variable d'une forme binaire, qui jouissent de la propriété dont nous nous occupons, savoir d'être identiques à une fonction de la forme et de ses dérivées unilatérales, sans que la variable apparaisse explicitement. Ce sont les fonctions que M. Deruyts a étudiées sous le nom de *semi-covariants* dans un travail récent [*Développements sur la théorie des formes binaires* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique;* 1887)]. Les semi-covariants sont définis comme satisfaisant à l'une seulement des deux équations auxquelles satisfont les covariants : la démonstration donnée plus haut au n° 3 pour les covariants ne suppose précisément qu'une seule de ces deux équations; elle s'applique donc aussi aux semi-covariants. Seulement, un semi-covariant n'est complètement dé-

terminé que si l'on connaît son dernier terme. Soit r l'ordre du semi-covariant par rapport aux variables, l'opération $\frac{d}{d\zeta}$, appliquée r fois successivement au coefficient de ce dernier terme, donne, à des facteurs numériques près, les coefficients des autres termes; appliquée une fois de plus, elle donne zéro.

On en conclut immédiatement que, si $\frac{d^r}{d\theta^r}$ représente le résultat de l'opération

$$f_1\frac{d}{df}+f_2\frac{d}{df_1}+\ldots+f_n\frac{d}{df_{n-1}} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{d\theta},$$

répétée r fois sur une fonction de f et de ses dérivées unilatérales $f_1, f_2, \ldots, f_n$, l'expression d'un semi-covariant d'ordre r en fonction de $f, f_1, \ldots, f_n$ satisfait à la condition

$$\frac{d^{r+1}}{d\theta^{r+1}}=0 \tag{19}$$

(il en est, d'ailleurs, évidemment de même de l'expression d'un covariant d'ordre r); et que cette expression s'obtiendra en remplaçant a_p par $\frac{p!}{n!}f_{n-p}$ dans le coefficient du dernier terme du semi-covariant. Réciproquement, toute fonction homogène et isobarique de f et de ses dérivées unilatérales qui satisfait à la condition (19) est identique à un semi-covariant ou à un covariant de f, d'ordre r; dans ce dernier cas, elle satisfait aussi, comme nous l'avons vu, à la condition (14).

On peut réunir comme suit, sous un énoncé unique, les propriétés que nous venons de considérer relativement à toutes les formations invariantes ou semi-invariantes qui dépendent d'une forme binaire :

Théorème IV. — *Toute formation déduite d'une forme binaire d'ordre n, et qui possède le caractère d'invariance par rapport à l'une x_1 des deux variables, est identique à une fonction de la forme et de ses dérivées successives par rapport à cette variable seule, divisée par une certaine puissance de la seconde variable x_2. Cette fonction satisfait à la condition* (19), *r étant l'ordre de la formation considérée; on l'obtient en remplaçant simplement a_p, coefficient de x_2^p dans la forme* *binaire, par* $\frac{p!}{n!}f_{n-p}$, *dans le coefficient du dernier terme de la formation considérée.*

Réciproquement, toute fonction homogène et isobarique de la forme et de ses dérivées unilatérales (par rapport à la variable x_1*), si elle satisfait à la condition* (19), *est identique, à une certaine puissance près de* x_2, *à une formation d'ordre r possédant le caractère d'invariance par rapport à* x_1 : *savoir un semi-covariant si* $r > 0$, *un péninvariant si* $r = 0$, *un covariant si la fonction satisfait à la condition* (14) *en même temps qu'à* (19) *pour* $r > 0$, *un invariant si elle satisfait à la fois à* (14) *et à* (19) *pour* $r = 0$.

Il est clair qu'on peut aussi donner l'énoncé général suivant pour ce qui se rapporte à l'intégration sous forme parabolique des équations différentielles où la variable ne figure pas explicitement :

Théorème V. — *Si une équation différentielle d'ordre n*

$$F[y, y', y'', \ldots, y^{(n)}] = 0,$$

où la variable ne figure pas explicitement, satisfait à la condition

$$\frac{d^r F}{d\theta^r} = 0,$$

l'intégrale de forme parabolique

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n,$$

la plus générale possible de cette équation, s'obtiendra en écrivant les r équations de condition

$$\begin{aligned} F &= 0, \\ \frac{dF}{d\theta} &= 0, \\ \frac{d^2 F}{d\theta^2} &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{d^{r-1} F}{d\theta^{r-1}} &= 0, \end{aligned}$$

et en y remplaçant y, y', y'', $\ldots$, $y^{(n)}$ *respectivement par* A_0, A_1, $2!A_2$, $3!A_3$, $\ldots$, $n!A_n$, *ce qui donnera r relations entre les constantes de l'intégrale.*

Prenons, par exemple, l'équation différentielle du sixième ordre

$$F = 30\, y y^{\text{VI}} - 10\, y' y^{\text{V}} - 2\, y'' y^{\text{IV}} + 3\, y'''^2 = 0.$$

On trouve successivement

$$\frac{dF}{d\theta} = 4(5y' y^{\text{VI}} - 3y'' y^{\text{V}} + y''' y^{\text{IV}}),$$

$$\frac{d^2F}{d\theta^2} = 4(2y'' y^{\text{VI}} - 2y''' y^{\text{V}} + y^{\text{IV}2}),$$

$$\frac{d^3F}{d\theta^3} = 0.$$

On obtiendra donc une intégrale parabolique à quatre constantes arbitraires, en prenant

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + A_6 x^6$$

et écrivant les trois relations de condition

$$1800\, A_0 A_6 - 100\, A_1 A_5 - 8\, A_2 A_4 + 9\, A_3^2 = 0,$$
$$25\, A_1 A_6 - 5\, A_2 A_5 + A_3 A_4 = 0,$$
$$10\, A_2 A_6 - 5\, A_3 A_5 + 2\, A_4^2 = 0,$$

comme il est d'ailleurs facile de le vérifier directement. Le semi-covariant correspondant de la forme du sixième ordre

$$(a, b, c, d, e, f, g \between x, y)^6$$

serait

$$(ae - 4bd + 3c^2)x^2 + (af - 3be + 2cd)xy \\ + \tfrac{1}{4}(ag - 2bf - ce + 2d^2)y^2.$$

7. Les résultats précédents s'étendent sans difficulté aux systèmes de formes binaires, et les théorèmes I, II, IV subsistent, avec de légères modifications d'énoncé qui se présentent d'elles-mêmes. Les théorèmes III et V pourraient également être généralisés dans cet ordre d'idées; mais il me paraît inutile d'insister sur ce sujet.

Avant de passer au cas des formes à plus de deux variables, il convient de remarquer encore que rien n'empêche de rester dans l'hypothèse des variables homogènes : il faut alors diviser l'expression différentielle trouvée pour les formations invariantes ou semi-invariantes relativement à l'une x_1 des variables par x_2^{π}, π étant le poids par rapport à x_1 du coefficient de la plus haute puissance de x_1 dans cette formation; ou, ce qui revient au même, remplacer a_p par $\frac{p!}{n!}\frac{f_{n-p}}{x_2^p}$ dans le coefficient de la plus haute puissance de x_2 et multiplier par cette plus haute puissance.

Tout invariant ou covariant, pouvant être considéré à volonté comme jouissant de la propriété d'invariance à l'égard de l'une ou de l'autre des deux variables, aura deux expressions équivalentes, l'une en fonction des dérivées unilatérales par rapport à x_1, l'autre en fonction des dérivées unilatérales par rapport à x_2 : en les égalant, on obtiendra une expression du rapport $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^\pi$ en fonction de la forme et de ses dérivées. Toutes les identités qu'on peut obtenir par cette voie découlent évidemment du théorème des fonctions homogènes, et l'on pourrait inversement, en appliquant ce théorème plusieurs fois et dans le sens convenable, obtenir *a priori* les expressions des invariants et covariants sous forme de fonctions de dérivées unilatérales.

8. Pour étendre les résultats précédents aux formes et systèmes de formes à plus de deux variables homogènes, on peut employer un mode de raisonnement calqué sur celui qui nous a servi pour les formes binaires. Soit, par exemple, f une forme d'ordre n aux p variables homogènes $x_1, x_2, \ldots, x_p$, écrite avec les coefficients polynomiaux; soient $a_{i,j,\ldots,k}$ le coefficient de $x_1^i\, x_2^j \ldots x_{p-1}^k\, x_p^{n-\sigma}$ dans $f\,(\sigma = i + j + \ldots + k)$, et $f_{q,r,\ldots,t}$ la dérivée partielle

$$\frac{d^{q+r+\ldots+t}}{dx_1^q\, dx_2^r \ldots dx_{p-1}^t}.$$

Il est aisé de vérifier tout d'abord l'exactitude de l'identité suivante, dont (2) est le cas particulier correspondant à $p = 2$:

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{n!}{(n-\sigma)!}x_p^{n-\sigma}a_{i,j,\ldots,k} = f_{i,j,\ldots,k} &- \frac{1}{1!}(x_1 f_{i+1,j,\ldots,k} + x_2 f_{i,j+1,\ldots k} + \ldots + x_{p-1} f_{i,j,\ldots,k+1}) \\ &+ \frac{1}{2!}(x_1^2 f_{i+2,j,\ldots,k} + 2x_1x_2 f_{i+1,j+1,\ldots,k} + \ldots + x_{p-1}^2 f_{i,j,\ldots,k+2}) \\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{(-1)^{n-\sigma}}{(n-\sigma)!}(x_1^{n-\sigma} f_{i+n-\sigma,j,\ldots,k} + \ldots + x_{p-1}^{n-\sigma} f_{i,j,\ldots,k+n-\sigma}). \end{aligned}\right.$$

On en conclut les $p - 1$ relations, analogues de (3),

$$(21)\quad x_p \frac{da_{,j,\ldots,k}}{dx_q} = -(n-\sigma)a_{i,j,\ldots,h+1,\ldots,k}, \qquad (q = 1, 2, \ldots; p-1),$$

où h est l'exposant de x_q dans le terme de f qui a pour coefficient $a_{i,j,\ldots,k}$.

On démontre dès lors sans difficulté que tout invariant ou péninvariant pur relatif à x_1 (coefficient de la plus haute puissance de x_1 dans un covariant pur) ne contient plus explicitement x_1, $x_2, \ldots, x_{p-1}$, lorsqu'on a remplacé dans son expression les coefficients a par leurs valeurs tirées de (20), et cela en vertu des équations différentielles connues auxquelles satisfont les invariants et péninvariants purs. Seulement ces équations sont au nombre de $p(p-1)$ en tout pour les invariants, et de $(p-1)^2$ pour les péninvariants, tandis que dans la démonstration indiquée ci-dessus il n'en est utilisé que $p-1$, savoir celles qui dans la notation de M. Cayley s'écriraient

$$\left(x_p \frac{d}{dx_q}\right) = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots, p-1), \tag{22}$$

et qui sont également satisfaites par tout péninvariant pur relatif à $x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}$. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème VI. — *Tout invariant ou péninvariant pur relatif à une des variables, d'une forme (ou d'un système de p formes) à variables homogènes, est identique à une fonction de ces formes et de leurs dérivées partielles par rapport à cette variable et à $p-2$ autres choisies arbitrairement, divisée par une certaine puissance de la $p^{ième}$ variable. Cette fonction s'obtient en remplaçant chaque coefficient $a_{ij\ldots k}$ [coefficient de $x_1^i x_2^j \ldots x_{p-1}^k x_{p-1}^{n-\sigma}$ $(\sigma = i + j + \ldots + k)$ dans la forme f, supposée d'ordre n], par $\dfrac{(n-\sigma)!}{n!} \dfrac{d^\sigma f}{dx_1^i\, dx_2^j \ldots dx_{p-1}^k}$; elle satisfait aux $p-1$ équations différentielles*

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_f \sum f_{i+1,j,\ldots,k} \frac{d}{df_{i,j,\ldots,k}} = 0, \\ &\sum_f \sum f_{i,j+1,\ldots,k} \frac{d}{df_{i,j,\ldots,k}} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\sum_f \sum f_{i,j,\ldots,k+1} \frac{d}{df_{i,j,\ldots,k}} = 0, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

où le premier signe Σ, dans l'ordre du calcul, s'applique, pour *une même forme f, à toutes les valeurs de $i, j, \ldots, k$, telles que la somme $\sigma = i + j + \ldots + k$ soit au plus égale à $n - 1$; et le second signe Σ étend l'opération à toutes les formes indépendantes.*

Mais il n'est plus permis d'ajouter, comme lorsqu'il s'agissait de formes binaires, que réciproquement toute fonction homogène et isobarique de formes à p variables et de leurs dérivées par rapport à $p - 1$ de ces variables, si elle satisfait aux $p - 1$ équations (23), sera un invariant ou un péninvariant pur relatif à x_1 du système de ces formes : elle pourra être aussi bien un péninvariant relatif à x_2, ou à $x_3, \ldots, x_{p-1}$, ou un agrégat de péninvariants de ces diverses natures, ou peut-être même une fonction d'autre genre; car il n'est pas démontré, à notre connaissance (bien que ce soit assez probable), que les équations (22) caractérisent exclusivement les péninvariants relatifs aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$.

En raisonnant de la même manière pour les covariants purs, on verrait sans peine que tout covariant pur est identique, à une puissance près de l'une quelconque des variables, à une fonction des formes indépendantes et de leurs dérivées par rapport aux $p - 1$ autres variables; que cette fonction s'obtient en remplaçant, dans le péninvariant relatif à la $p^{\text{ième}}$ variable, $a_{ij\ldots k}$ par $\frac{n-\sigma!}{n!} f_{ij\ldots k}$, $i, j, \ldots, k$ étant les indices relatifs aux $p - 1$ variables conservées; qu'elle satisfait à $p - 1$ équations différentielles analogues à (14); qu'enfin, si l'on considère l'ensemble des dérivées par rapport aux p variables, chaque covariant (ou invariant) possède p expressions distinctes, donnant lieu à $p - 1$ identités qui pourraient se déduire du théorème des fonctions homogènes, tandis que chaque péninvariant ne possède que $p - 1$ expressions distinctes, et ne donne lieu qu'à $p - 2$ telles identités.

9. On peut arriver aux résultats trouvés ci-dessus pour les invariants et péninvariants purs des systèmes de formes à plus de deux variables, en suivant une autre marche, qui a l'avantage de conduire à une généralisation immédiate en ce qui concerne les contrevariants et les péninvariants mixtes.

Soient $f, f', f'', \ldots$ tant de formes indépendantes et simultanées qu'on voudra, à p variables homogènes $x_1, x_2, \ldots, x_p$, respectivement d'ordres $n, n', n'', \ldots$; savoir

$$f = ax_1^n + n\varphi_1 x_1^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\varphi_2 x_1^{n-2} + \ldots + \varphi_n.$$
$$f' = a'x_1^{n'} + n'\varphi'_1 x_1^{n'-1} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et soit ϖ le covariant identique

$$\varpi = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_p x_p.$$

J'ai montré ailleurs (1) que tout invariant, contrevariant, péninvariant pur ou mixte (coefficient de la plus haute puissance de x_1 dans un covariant pur ou mixte) du système (A) des formes $f, f', \ldots$ devient, quand on le multiplie par une puissance convenable de a, une fonction entière de $a, a', \ldots$, de ξ_1 et des invariants d'un système déterminé (B) de formes aux $p-1$ variables $x_2, x_3, \ldots, x_p$, composé comme suit :

1° Des $n-1$ péninvariants principaux (sources des covariants associés) de f, traitée comme forme binaire où x_1 serait le rapport des deux variables homogènes;

2° Des n' péninvariants, sources des jacobiens de tout ordre de f et de f', traitées comme formes binaires;

3° Des $n'' + n''' + \ldots$ péninvariants analogues pour $f'', f''', \ldots$, combinées de même avec f;

4° De la forme spéciale

$$\psi = a(\varpi - \xi_1 x_1) - \varphi_1 \xi_1,$$

cette dernière devant être traitée comme si elle était à coefficients constants.

Ceci posé, admettons pour un instant comme démontré que tout invariant d'un système de formes à $p-1$ variables x_2, $x_3, \ldots, x_p$ est identique à une fonction entière de ces formes et de leurs dérivées par rapport à $p-2$ des variables, divisée par une certaine puissance de la $(p-1)^{\text{ième}}$. Il suffira de montrer que chacune des formes du système (B), ainsi que $a, a', \ldots$ et ξ_1 s'expriment en fonction entière des formes du système (A), y compris ϖ, et de leurs dérivées par rapport à x_1, pour qu'il soit établi

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CIV, p. 109, 221, 281 (1887).

que tout invariant, contrevariant, péninvariant pur ou mixte du système (A) s'exprime à son tour en fonction entière des formes du système (A) et de leurs dérivées par rapport aux $p-1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, à une puissance près de x_p. Et, puisque la proposition a été démontrée directement pour $p=2$, elle sera vraie pour $p=3, 4, \ldots$, c'est-à-dire pour un nombre quelconque de variables. Or les formes du système (B) qui sont des péninvariants construits avec les coefficients de $f, f', f'', \ldots$, traitées comme formes binaires à une seule variable non homogène, remplissent bien la condition indiquée. Il en est de même de la forme spéciale ψ qui fait partie du système (B), car on peut l'écrire

$$\psi = \frac{1}{n!}\varpi\frac{d^n f}{dx_1^n} - \frac{1}{n-1!}\frac{d\varpi}{dx_1}\frac{d^{n-1}f}{dx_1^{n-1}};$$

et il en est encore de même des quantités a, a', ... et ξ_1, car on a évidemment

$$a = \frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dx_1^n},$$
$$a' = \frac{1}{n'!}\frac{d^{n'} f}{dx_1^{n'}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\xi_1 = \frac{d\varpi}{dx_1}.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème VII. — *Tout invariant, contrevariant, péninvariant pur ou mixte relatif à x_1, d'une forme ou d'un système de formes à p variables homogènes, peut s'exprimer comme fonction entière des formes du système, du covariant identique, et des dérivées tant de ces formes que du covariant identique prises par rapport à x_1 et à $p-2$ autres variables choisies à volonté, divisée par une certaine puissance de la $p^{ième}$ variable. On obtient l'expression dont il s'agit en remplaçant dans la formation donnée ξ_i par $\frac{d\varpi}{dx_i}$ $(i=1, 2, \ldots, p-1)$; ξ_p par $\frac{\varpi}{x_p}$; et $a_{ij,\ldots,k}$, coefficient de $x_1^i x_2^j \ldots x_{p-1}^k x_p^{n-\sigma}$ $(\sigma = i+j+\ldots+k)$ dans la forme f d'ordre n (supposée écrite avec les coefficients polynomiaux), par $\frac{n-\sigma!}{n!\,x_p^{n-\sigma}}\frac{d^\sigma f}{dx_1^i dx_2^j, \ldots, dx_{p-1}^k}$, ou $\frac{n-\sigma!}{n!}\frac{1}{x_p^{n-\sigma}} f_{ij,\ldots,k}$.*

Par analogie, on prévoit que les covariants purs et mixtes pourront s'exprimer de la même manière, et que leur expression s'obtiendra en faisant les mêmes substitutions que ci-dessus dans le péninvariant, source du covariant par rapport à x_p, et multipliant par x_p^r, si r est l'ordre du covariant par rapport aux variables x; ou, ce qui revient au même, en remplaçant dans le péninvariant source du covariant par rapport à x_1, ξ_1 par $\frac{\varpi}{x_p}$; ξ_i, par $\frac{d\varpi}{dx_i}$ $(i = 2, 3, \ldots, p-1)$; ξ_p par $\frac{d\varpi}{dx_1}$; $a_{ij,\ldots,k}$ par $\frac{i!}{n!\,x_p^i} f_{n-\sigma,\,j,\ldots,k}$.

10. Comme exemple des résultats que donne l'application de ces théorèmes, voici l'une des trois expressions du contrevariant G de la forme quadratique ternaire $f = (x, y, z)^2$:

$$(24)\qquad G = \frac{1}{4z^2}\left\{\begin{aligned} &\left[2f\frac{d^2f}{dy^2} - \left(\frac{df}{dy}\right)^2\right]\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)^2 \\ &+\left[2f\frac{d^2f}{dx^2} - \left(\frac{df}{dx}\right)^2\right]\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)^2 \\ &+\left[\frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^2f}{dy^2} - \left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2\right]\varpi^2 \\ &+2\left(\frac{df}{dx}\frac{df}{dy} - f\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)\frac{d\varpi}{dx}\frac{d\varpi}{dy} \\ &+2\left(\frac{df}{dx}\frac{d^2f}{dx\,dy} - \frac{df}{dy}\frac{d^2f}{dx^2}\right)\varpi\frac{d\varpi}{dy} \\ &+2\left(\frac{df}{dy}\frac{d^2f}{dx\,dy} - \frac{df}{dx}\frac{d^2f}{dy^2}\right)\varpi\frac{d\varpi}{dx}, \end{aligned}\right.$$

formule qu'il est facile de vérifier en remplaçant f, ϖ, $\frac{df}{dx}$, ... par leurs valeurs complètes.

On trouve de même pour la source (par rapport à x) du hessien de la forme cubique ternaire $f = (x, y, z)^3$

$$(25)\quad h = \frac{1}{216z^2}\left\{\begin{aligned} &2\frac{df}{dx}\frac{d^3f}{dx^3}\frac{d^3f}{dx\,dy^2} - \left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2\frac{d^3f}{dx^3} - \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)^2\frac{d^3f}{dx\,dy^2} \\ &+2\frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^2f}{x\,dy}\frac{d^3f}{dx^2\,dy} - 2\frac{df}{dx}\left(\frac{d^3f}{dx^2\,dy}\right)^2, \end{aligned}\right.$$

et pour le hessien complet

$$(26)\quad H = \frac{1}{108z^2}\left\{\begin{aligned} &3f\frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^2f}{dy^2} - 3f\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2 + 4\frac{df}{dx}\frac{df}{dy}\frac{d^2f}{dx\,dy} \\ &-2\left(\frac{df}{dx}\right)^2\frac{d^2f}{dy^2} - 2\left(\frac{df}{dy}\right)^2\frac{d^2f}{dx^2}. \end{aligned}\right.$$

Cette dernière expression est, comme celle de G, symétrique par rapport à x et y, ainsi que cela devait être. Comme vérification, prenons l'expression du hessien sous forme de déterminant où entrent symétriquement les dérivées de f par rapport aux trois variables, d'après la définition connue de ce covariant; désignant, pour abréger, par f_{pqr} la dérivée $\frac{d^{p+q+r}f}{dx^p\,dy^q\,dz^r}$, on a, à un facteur, numérique près,

$$(27)\qquad H = \begin{vmatrix} f_{200} & f_{110} & f_{101} \\ f_{110} & f_{020} & f_{011} \\ f_{101} & f_{011} & f_{002} \end{vmatrix}.$$

Mais le théorème des fonctions homogènes fournit les quatre relations

$$(28)\qquad \begin{cases} 3f = xf_{100} + yf_{010} + zf_{001}, \\ 2f_{100} = xf_{200} + yf_{110} + zf_{101}, \\ 2f_{010} = xf_{110} + yf_{020} + zf_{011}, \\ 2f_{001} = xf_{101} + yf_{011} + zf_{002}. \end{cases}$$

Si l'on porte dans la dernière colonne du déterminant (27) les valeurs de $f_{101}, f_{011}, f_{002}$ tirées des trois dernières relations (28), et qu'on ajoute à cette dernière colonne les deux premières respectivement multipliées par $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$, il vient

$$H = \frac{2}{z}\begin{vmatrix} f_{200} & f_{110} & f_{100} \\ f_{110} & f_{020} & f_{010} \\ f_{101} & f_{011} & f_{001} \end{vmatrix}.$$

Remplaçons encore dans la dernière ligne de ce déterminant les f par leurs valeurs tirées des trois premières équations (28), et ajoutons à cette dernière ligne les deux premières respectivement multipliées par $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$; il vient

$$H = \frac{2}{z^2}\begin{vmatrix} f_{200} & f_{110} & f_{100} \\ f_{110} & f_{020} & f_{010} \\ 2f_{100} & 2f_{010} & 3f \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire précisément, à un facteur numérique près, l'expression (26).

On pourrait évidemment obtenir de même, au moyen du théorème des fonctions homogènes, en partant de l'expression différentielle que fournit la définition ou la formule symbolique de tout covariant, son expression telle qu'elle résulte immédiatement de l'application des théorèmes donnés ci-dessus.