

BULLETIN DE LA S. M. F.

WILLIOT

Note sur le procédé le plus simple de calcul des nombres de Bernoulli

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 144-149

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__144_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*Note sur le procédé le plus simple de calcul des nombres
de Bernoulli; par M. WILLIOT.*

(Séance du 6 juin 1888.)

De nombreuses méthodes ont été proposées pour simplifier, autant que possible, le calcul des nombres de Bernoulli; mais il ne semble pas que l'on ait tiré un parti suffisant des remarquables formules de Seidel, généralisées par M. Stern.

M. E. Catalan, en démontrant le théorème de Staudt et Clausen, a signalé comme avantageux ⁽¹⁾ l'emploi des nombres entiers

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, T. IV (mars 1880).

1° De $n = 5$ à $n = 8$:

$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)2.3.5} \begin{vmatrix} 5.5 & 1 & 0 & 0 \\ -691 & 0 & 7 & 0 \\ 7.5 & 0 & 0 & 1 \\ -3617 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} n=5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

2° De $n = 9$ à $n = 14$:

$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)2.3.5.7.11.13} \begin{vmatrix} 5.5.7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -691 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.5.7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3617.7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 43867.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -174611.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 854513.5.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -236364091 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 8553103.5.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -23749461029.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} n=6 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix}$$

On trouve ainsi

$$B_{22} = \frac{854513.5.7.11}{2.3.5.7.11.23} = \frac{854513}{2.3.23},$$

$$B_{28} = -\frac{23749461029.7.11.13}{2.3.5.7.11.13.29} = \frac{23749461029}{2.3.5.29}$$

3° De $n = 15$ à $n = 17$.

$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)2.3.5.7.11.13.17} \begin{vmatrix} -3617.7.11 & 1 & & & & & & & \\ 43867.5.11 & 0 & 1 & & & & & & \\ -174611.7 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ 854513.5.7.11 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ -236364091.11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & & & \\ 8553103.5.7.11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ -23749461029.7.11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 8615841276005.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -7709321041217.7.11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} n=15 \\ n=16 \end{matrix}$$

$$B_{32} = -\frac{7709321041217.7.11.13}{2.3.5.7.11.13.17} = \frac{7709321041217}{2.3.5.17}.$$

Le calcul ne comprend que des multiplications et des additions, et s'effectue aussi rapidement que le permet l'importance des nombres en question.

On trouve ainsi une confirmation de la loi de MM. Standt et Clausen. Nous avons indiqué ici une réduction successive; mais

on pourrait également calculer directement un déterminant quelconque, c'est-à-dire un nombre quelconque de Bernoulli.

Nous sommes d'ailleurs arrivé à ces déterminants en réduisant l'expression immédiate du coefficient de la formule d'Euler

$$\Delta F(x) = hF'(x) + A_1 \Delta F'(x) \frac{h}{1} \\ + A_2 \Delta F''(x) h^2 + A_3 \Delta F'''(x) h^3 - \dots + A_m \Delta F^{(m)}(x) h^m + \dots$$

qui est

$$A_m = \frac{B_m}{1.2 \dots m} = (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{1.2.3.4} & \frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2} & \frac{1}{1} & 0 \\ \frac{1}{1.2.3.4.5} & \frac{1}{1.2.3.4} & \frac{1}{1.2.3} & \frac{1}{1.2} & 0 \\ \frac{1}{1.2 \dots m} & \frac{1}{1.2.(m-1)} & \frac{1}{1.2.(m-2)} & \frac{1}{1.2.(m-3)} & \frac{1}{1} \\ \frac{1}{1.2.(m+1)} & \frac{1}{1.2.m} & \frac{1}{1.2.(m-1)} & \frac{1}{1.2.(m-2)} & \frac{1}{1.2} \end{vmatrix}$$

déterminant symétrique formé avec les $(m+1)$ premières fonctions $\frac{1}{\Gamma(P)}$.

Nous ne donnons pas ces calculs, un peu étendus, qui ne font que conduire à la formule de Seidel.