BULLETIN DE LA S. M. F.

V. JAMET

Sur le rapport anharmonique d'une courbe du troisième ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 35-38
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__35_1>

Sur le rapport anharmonique d'une courbe du troisième ordre;
par M. JAMET.

(Séance du 19 janvier 1887.)

1. On connaît le beau théorème de M. Salmon, relatif aux courbes du troisième ordre : *Le rapport anharmonique des quatre tangentes que l'on peut mener à une courbe du troisième ordre, par un de ses points, est constant pour tous les points de la courbe.* Je me propose d'en indiquer une démonstration, fondée sur le théorème suivant : *L'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 + By + C = 0,$$

où A, B, C *désignent des fonctions données de x, est telle que le rapport anharmonique de quatre de ses solutions est constant, et réciproquement.* (Em. Picard, *Annales de l'École Normale supérieure,* 2e série, t. VI, p. 341-343.)

2. Notre démonstration consiste en ceci : On sait que l'équation d'une courbe du troisième degré peut toujours être transformée, par voie d'homographie, en une équation de la forme

$$ay^2 = x^3 + px^2 + qx + r \equiv f(x),$$

et il suffit de démontrer le théorème pour une courbe représentée par cette équation. Soit donc

$$y = ux + v$$

l'équation d'une tangente à cette courbe : l'abscisse du point de contact devra vérifier les deux équations

$$a(ux + v)^2 = f(x), \tag{1}$$

$$2au(ux + v) = f'(x). \tag{2}$$

Soit, en outre, ξ l'abscisse du point, différent du point de contact, où cette droite rencontre la courbe; la variable ξ doit elle-même vérifier l'équation

$$a(u\xi + v)^2 = f(\xi). \tag{3}$$

Considérons u, v, x comme des fonctions de ξ définies par les relations (1), (2), (3); ces fonctions devront aussi vérifier l'équation

$$x\frac{du}{d\xi} + \frac{dv}{d\xi} = 0 \tag{4}$$

qu'on déduit, par différentiation, de l'équation (1), en tenant compte de l'équation (2). Elles doivent encore vérifier l'équation

$$2a(u\xi + v)\left(u + \xi\frac{du}{d\xi} + \frac{dv}{d\xi}\right) = f'(\xi) \tag{5}$$

déduite, par différentiation, de l'équation (4).

Si l'on retranche membre à membre les équations (2) et (5), que l'on remplace, dans l'équation résultante, $\frac{dv}{d\xi}$ par $-x\frac{du}{d\xi}$ [expression déduite de l'équation (4)], et qu'enfin on supprime le facteur commun $\xi - x$, on trouve

$$2au^2 + 2a(u\xi + v)\frac{du}{d\xi} = f''(x) + \frac{(\xi - x)}{2} f'''(x)$$

ou bien

$$(6) \qquad 2au^2 + 2a(u\xi + v)\frac{du}{d\xi} = 3(\xi + x) + 2p.$$

D'autre part, si l'on retranche les équations (3) et (1) membre à membre et qu'on supprime encore le facteur $\xi - x$, on trouve

$$au[u(\xi + x) + 2v] = f'(x) + \frac{\xi - x}{2} f''(x) + \frac{(\xi - x)^2}{6} f'''(x).$$

Puis, si l'on retranche membre à membre cette dernière équation et l'équation (2), on trouve, après avoir supprimé encore le facteur $\xi - x$,

$$(7) \qquad au^2 = \tfrac{1}{2} f''(x) + \tfrac{1}{6}(\xi - x) f'''(x) = 2x + \xi + p.$$

Éliminant x entre (6) et (7), on trouve

$$a(u\xi + v)\frac{du}{d\xi} = \frac{3\xi + p}{4} - \frac{au^2}{4}.$$

Enfin, à cause de l'équation (3),

$$(8) \qquad \sqrt{a}\frac{du}{d\xi} = \frac{3\xi + p}{4\sqrt{f(\xi)}} - \frac{au^2}{4\sqrt{f(\xi)}}.$$

Posons

$$(9) \qquad \sqrt{a}\, u = \theta,$$

l'équation précédente devient

$$(10) \qquad \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{3\xi + p}{4\sqrt{f(\xi)}} - \frac{\theta^2}{4\sqrt{f(\xi)}}.$$

3. Je dis maintenant qu'il existe, entre θ et ξ, une relation algébrique, du quatrième degré par rapport à θ. En effet, cherchons la condition pour qu'une droite, issue du point ξ, η, situé sur la courbe, lui soit tangente en un autre point. Soient

$$x = \xi + \lambda\rho,$$
$$y = \eta + \mu\rho$$

les équations qui définissent cette droite. Si l'on substitue ces expressions de x et de y dans l'équation de la courbe, et qu'on tienne compte de la condition

$$a\eta^2 = f(\xi), \tag{11}$$

on trouve une équation qui, par rapport à ρ, est du troisième degré. Elle admet, comme on devait s'y attendre, la solution $\rho = 0$: supprimant cette solution et cherchant la condition pour que les deux autres racines soient égales, puis faisant $\mu = \lambda u$ dans l'équation de condition, on trouve

$$(3\xi + p - au^2)^2 - 4(3\xi^2 + 2p\xi + q - 2au\eta) = 0$$

et, à cause des formules (9) et (11),

$$(3\xi + p - \theta^2)^2 - 4\left[3\xi^2 + 2p\xi + q - 2\theta\sqrt{f(\xi)}\right] = 0.$$

Toute racine de cette équation est une fonction de ξ qui doit vérifier l'équation différentielle (10). Donc, en vertu du théorème de M. Picard, le rapport anharmonique de ces quatre racines est constant; mais, à cause de la formule (9), ce rapport anharmonique est égal à celui des quatre valeurs correspondantes de u.

Le théorème est donc démontré.

4. Si maintenant on veut calculer l'un des rapports anharmoniques constants des quatre tangentes mobiles considérées, on calculera celui des quatre tangentes parallèles à l'axe Oy : l'une d'elles est rejetée à l'infini et coïncide avec la tangente d'inflexion; les trois autres touchent la courbe aux points où celle-ci touche l'axe Ox. Si donc on désigne par α, β, γ les racines de l'équation

$$f(x) = 0,$$

l'un de ces rapports sera égal à

$$\frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta},$$

et l'on vérifiera sans difficulté que ce rapport est égal au carré du module des intégrales elliptiques appartenant à la courbe donnée.