

# BULLETIN DE LA S. M. F.

M. DEMARTRES

## Sur la courbure totale des surfaces

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 15 (1887), p. 34-35

<[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1887\\_15\\_34\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887_15_34_0)>

© Bulletin de la S. M. F., 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>*

*Sur la courbure totale des surfaces; par M. DEMARTRES.*

(Séance du 19 janvier 1887.)

Considérons sur une surface un point  $M$ , et prenons un plan de référence fixe  $P$ . Si l'on se déplace infiniment peu sur la surface, suivant une direction  $MM'$ , on s'éloignera du plan  $P$  d'une quantité  $dh$ ; en même temps la trace, sur  $P$ , du plan tangent en  $M$ , tournera d'un angle  $d\varphi$ ;  $\theta$  étant l'angle de  $P$  avec le plan tangent en  $M$ , je désignerai, pour abréger, par *flexion* de l'élément  $MM'$  le rapport  $\frac{dh}{d\varphi} \frac{1}{\sin^2 \theta}$ .

**THÉORÈME.** — *Si l'on considère sur une surface deux déplacements infiniment petits, effectués à partir d'un même point  $M$ , suivant deux directions conjuguées<sup>(1)</sup>, le produit  $ff_1$  des deux flexions correspondantes par rapport à un même plan de référence est égal au produit des rayons de courbure principaux au point  $M$  et de signe contraire; on a, en d'autres termes,  $ff_1 + RR_1 = 0$ .*

Ce théorème paraît important en ce qu'il donne une expression très générale de la courbure totale; on peut, en effet, choisir arbitrairement, et indépendamment l'une de l'autre, la direction du plan  $P$  et l'orientation de l'élément  $MM'$ .

**Démonstration.** — Prenons le plan de  $yz$  pour plan de référence; en adoptant les notations ordinaires, on a

$$dh = dx, \quad d\varphi = \frac{dq}{1+q^2}, \quad \sin^2 \theta = \frac{1+q^2}{1+p^2+q^2},$$
$$f = \frac{dx}{s dx + t dy} (1+p^2+q^2);$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+p^2+q^2-sf}{tf},$$

---

(1) Par *conjugués* nous entendons deux déplacements effectués suivant des diamètres conjugués de l'indicatrice au point  $M$ .

et de même, pour le déplacement conjugué,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1 + p^2 + q^2 - sf_1}{tf_1}.$$

La condition, pour que les deux déplacements soient conjugués, est d'ailleurs

$$r + s \left( \frac{dy}{dx} + \frac{dy_1}{dx_1} \right) + t \frac{dy}{dx} \frac{dy_1}{dx_1} = 0.$$

Si l'on y substitue à  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{dy_1}{dx_1}$  les deux expressions ci-dessus, on a immédiatement

$$ff_1 + \frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{rt - s^2} = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

En particulier, si le déplacement MM' a lieu suivant une ligne asymptotique, on aura

$$f = \sqrt{-R_1 R_2},$$

formule qui conduit à un grand nombre de résultats connus, en particulier pour les surfaces réglées.

On voit aisément dans quel genre de questions le théorème précédent peut intervenir avec avantage; nous reviendrons sur ce sujet.

---