BULLETIN DE LA S. M. F.

M. DEMARTRES

Sur la courbure totale des surfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 34-35
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__34_0>

Sur la courbure totale des surfaces; par M. DEMARTRES.

(Séance du 19 janvier 1887.)

Considérons sur une surface un point M, et prenons un plan de référence fixe P. Si l'on se déplace infiniment peu sur la surface, suivant une direction MM′, on s'éloignera du plan P d'une quantité dh; en même temps la trace, sur P, du plan tangent en M, tournera d'un angle $d\varphi$; θ étant l'angle de P avec le plan tangent en M, je désignerai, pour abréger, par *flexion* de l'élément MM′ le rapport $\frac{dh}{d\varphi}\frac{1}{\sin^2\theta}$.

THÉORÈME. — *Si l'on considère sur une surface deux déplacements infiniment petits, effectués à partir d'un même point* M, *suivant deux directions conjuguées* (1), *le produit* ff_1 *des deux flexions correspondantes par rapport à un même plan de référence est égal au produit des rayons de courbure principaux au point* M *et de signe contraire; on a, en d'autres termes,* $ff_1 + RR_1 = 0$.

Ce théorème paraît important en ce qu'il donne une expression très générale de la courbure totale; on peut, en effet, choisir arbitrairement, et indépendamment l'une de l'autre, la direction du plan P et l'orientation de l'élément MM′.

Démonstration. — Prenons le plan de yz pour plan de référence; en adoptant les notations ordinaires, on a

$$dh = dx, \qquad d\varphi = \frac{dq}{1+q^2}, \qquad \sin^2\theta = \frac{1+q^2}{1+p^2+q^2},$$

$$f = \frac{dx}{s\,dx + t\,dy}(1+p^2+q^2);$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+p^2+q^2-sf}{tf},$$

(1) Par *conjugués* nous entendons deux déplacements effectués suivant des diamètres conjugués de l'indicatrice au point M.

et de même, pour le déplacement conjugué,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1 + p^2 + q^2 - sf_1}{tf_1}.$$

La condition, pour que les deux déplacements soient conjugués, est d'ailleurs

$$r + s\left(\frac{dy}{dx} + \frac{dy_1}{dx_1}\right) + t\frac{dy}{dx}\frac{dy_1}{dx_1} = 0.$$

Si l'on y substitue à $\frac{dy}{dx}, \frac{dy_1}{dx_1}$ les deux expressions ci-dessus, on a immédiatement

$$ff_1 + \frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{rt - s^2} = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

En particulier, si le déplacement MM′ a lieu suivant une ligne asymptotique, on aura

$$f = \sqrt{-R_1 R_2},$$

formule qui conduit à un grand nombre de résultats connus, en particulier pour les surfaces réglées.

On voit aisément dans quel genre de questions le théorème précédent peut intervenir avec avantage; nous reviendrons sur ce sujet.