C.-A. LAISANT

Théorèmes de trigonométrie

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 198-202
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__198_1>

Théorèmes de Trigonométrie; par M. C.-A. LAISANT.

(Séance du 2 novembre 1887.)

I. *Si l'on a simultanément les deux relations linéaires suivantes, entre les cosinus d'autant d'arcs qu'on voudra*

$$(1)\quad \begin{cases} A_1 \cos x_1 + A_2 \cos x_2 + \ldots\ldots + A_n \cos x_n = 0, \\ A_1 \cos(x_1+\alpha) + A_2 \cos(x_2+\alpha) + \ldots + A_n \cos(x_n+\alpha) = 0, \end{cases}$$

on aura aussi

$$(2)\quad A_1 \cos(x_1+\theta) + A_2 \cos(x_2+\theta) + \ldots + A_n \cos(x_n+\theta) = 0,$$

θ *étant une quantité arbitraire quelconque.*

Il suffit, pour démontrer ce théorème, de remarquer que les relations (1), si l'on considère $A_1, A_2, \ldots, A_n$ comme représentant des lignes droites, expriment que les projections d'un certain contour sur deux directions différentes sont nulles, et, par conséquent, que ce contour est fermé. Donc sa projection sur toute autre direction est aussi nulle, et conséquemment on a la relation (2).

Il est à peine utile de faire remarquer que α doit différer de $k\pi$, k étant un nombre entier, sans quoi les relations (1) se réduiraient à une seule.

On a aussi

$$(3)\qquad A_1 \sin(x_1 + \theta) + A_2 \sin(x_2 + \theta) + \ldots + A_n \sin(x_n + \theta) = 0,$$

car il suffit de remplacer θ par $\frac{\pi}{2} + \theta$ dans la relation (2) pour obtenir ce résultat.

II. *Si l'on a les deux relations*

$$(4)\qquad \begin{cases} A_1 \sin x_1 + A_2 \sin x_2 + \ldots\ldots + A_n \sin x_n = 0, \\ A_1 \sin(x_1 + \alpha) + A_2 \sin(x_2 + \alpha) + \ldots + A_n \sin(x_n + \alpha) = 0, \end{cases}$$

on aura aussi

$$(3)\qquad A_1 \sin(x_1 + \theta) + A_2 \sin(x_2 + \theta) + \ldots + A_n \sin(x_n + \theta) = 0,$$

$$(2)\qquad A_1 \cos(x_1 + \theta) + A_2 \cos(x_2 + \theta) + \ldots + A_n \cos(x_n + \theta) = 0.$$

En effet, les formules (4) peuvent s'écrire

$$A_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x_1\right) + \ldots + A_n \cos\left(\frac{\pi}{2} + x_n\right) = 0,$$

$$A_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x_1 + \alpha\right) + \ldots + \cos A_n \left(\frac{\pi}{2} + x_n + \alpha\right) = 0,$$

et il suffit d'appliquer le théorème précédent.

III. *Si l'on a les deux relations*

$$(5)\qquad \begin{cases} A_1 \sin x_1 + A_2 \sin x_2 + \ldots + A_n \sin x_n = 0, \\ A_1 \cos x_1 + A_2 \cos x_2 + \ldots + A_n \cos x_n = 0, \end{cases}$$

elles subsisteront encore si l'on remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *par* $x_1 + \theta, x_2 + \theta, \ldots, x_n + \theta$.

Il suffit, dans le théorème II, de faire $\alpha = \frac{\pi}{2}$ pour obtenir le résultat énoncé.

IV. Il est possible que l'on ait dans chacune des deux relations du théorème III des sinus et des cosinus, sans que ce théorème cesse d'être applicable, au moyen d'une préparation convenable. Si, par exemple, on a les deux termes correspondants $A_p \cos x_p$ et $A_p \sin x_p$, on peut respectivement les écrire

$$A_p \sin\left(\frac{\pi}{2} - x_p\right) \quad \text{et} \quad A_p \cos\left(\frac{\pi}{2} - x_p\right).$$

Si les signes diffèrent au lieu de se correspondre, comme, par exemple, dans $+ A_p \sin x_p$ et $- A_p \cos x_p$, on écrira

$$- A_p \sin(- x_p) \quad \text{et} \quad - A_p \cos(- x_p).$$

Si enfin l'une des deux relations (5), dans le théorème III, a un second membre b et que l'autre ait pour second membre zéro, on pourra encore appliquer ce théorème en écrivant

$$b = b \sin\frac{\pi}{2} = b \cos o,$$

$$o = b \cos\frac{\pi}{2} = b \sin o.$$

V. On remarquera que toutes les considérations qui précèdent et, conséquemment, les propositions I, II et III, ne s'appuient que sur la théorie des projections et sur la définition des lignes trigonométriques. On peut donc s'en servir pour établir, sans aucun cercle vicieux, certaines formules fondamentales de la Trigonométrie.

A titre d'exemple, nous allons donner ici, dans toute leur généralité, les formules qui fournissent le sinus et le cosinus de la somme de deux arcs. A cet effet, écrivons les deux identités $\sin x = \sin x$, $\cos x = \cos x$ sous la forme

$$1.\sin x = \sin x \sin\frac{\pi}{2} + \cos x \sin o,$$

$$1.\cos x = \sin x \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \cos o,$$

Le théorème III s'applique, et, en remplaçant θ par y, on a

$$\sin(x + y) = \sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x + y) = \sin x \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + \cos x \cos y,$$

c'est-à-dire

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\cos(x + y) = - \sin x \sin y + \cos x \cos y.$$

Voici une autre application. On a, dans un triangle, les relations

$$a \cos B + b \cos A = c,$$
$$b \cos C + c \cos B = a,$$

que fournit la seule théorie des projections.

On peut les écrire

$$a \cos B + b \cos(-A) + c \cos(-\pi) = 0,$$
$$a \cos\pi + b \cos C \qquad + c \cos(-B) = 0,$$

et sous cette forme on voit qu'elles rentrent dans l'énoncé du théorème I, car les différences des arcs sont

$$\pi - B = C + A = -B + \pi.$$

Donc

$$a \cos(B + \theta) + b \cos(\theta - A) + c \cos(\theta - \pi) = 0,$$
$$a \sin(A + \theta) + b \sin(\theta - A) + c \sin(\theta - \pi) = 0.$$

En particulier, la dernière formule, si l'on fait $\theta = 0$, donne

$$a \sin B = b \sin A.$$

VI. On peut étendre aisément la plupart des considérations précédentes aux fonctions hyperboliques.

Si l'on a deux relations de la forme

$$(6) \quad \begin{cases} A_1 \operatorname{Ch} x_1 + A_2 \operatorname{Ch} x_2 + \ldots + B_1 \operatorname{Sh} y_1 + B_2 \operatorname{Sh} y_2 + \ldots = 0, \\ A_1 \operatorname{Sh} x_1 + A_2 \operatorname{Sh} x_2 + \ldots + B_1 \operatorname{Ch} y_1 + B_2 \operatorname{Ch} y_2 + \ldots = 0, \end{cases}$$

ces deux relations subsisteront lorsqu'on y remplacera les arcs $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ *par* $x_1 + \theta, x_2 + \theta, \ldots, y_1 + \theta, y_2 + \theta, \ldots,$ θ *étant une quantité arbitraire quelconque.*

On le démontre en ajoutant, multipliant par e^{θ}, en soustrayant, multipliant par $e^{-\theta}$, puis en combinant par addition et soustraction les deux résultats.

De la sorte, on déduit immédiatement les formules d'addition des identités

$$1 . \operatorname{Sh} x = \operatorname{Sh} x \operatorname{Ch} 0 + \operatorname{Ch} x \operatorname{Sh} 0,$$
$$1 . \operatorname{Ch} x = \operatorname{Ch} x \operatorname{Sh} 0 + \operatorname{Ch} x \operatorname{Ch} 0;$$

car, en ajoutant y, il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{Sh}(x+y) &= \mathrm{Sh}y\,\mathrm{Ch}y + \mathrm{Ch}x\,\mathrm{Sh}y, \\ \mathrm{Ch}(x+y) &= \mathrm{Sh}y\,\mathrm{Sh}y + \mathrm{Ch}x\,\mathrm{Ch}y. \end{aligned}$$

Si deux termes sont de signes contraires, on les rendra de même signe comme ci-dessus en remplaçant $\mathrm{Sh}\,x$ par $-\mathrm{Sh}(-x)$ et $\mathrm{Ch}\,x$ par $\mathrm{Ch}(-x)$.

Si dans une relation il y a un second membre b et dans l'autre o, on écrira

$$b = b.\mathrm{Ch}\,0, \qquad 0 = b.\mathrm{Sh}\,0,$$

ainsi qu'il a été fait dans l'exemple qui précède.

Enfin les théorèmes I et II s'appliquent, eux aussi, aux fonctions hyperboliques, et l'on obtient l'énoncé suivant :

Si l'on a simultanément les relations

$$(7) \qquad A_1\,\mathrm{Ch}\,x_1 + A_2\,\mathrm{Ch}\,x_2 + \ldots + B_1\,\mathrm{Sh}\,y_1 + B_2\,\mathrm{Sh}\,y_2 + \ldots = 0,$$

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} & A_1\,\mathrm{Ch}(x_1+\alpha) + A_2\,\mathrm{Ch}(x_2+\alpha) + \ldots \\ & + B_1\,\mathrm{Sh}(y_1+\alpha) + B_2\,\mathrm{Sh}(y_2+\alpha) + \ldots = 0, \end{aligned} \right.$$

on aura aussi, θ étant quelconque,

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} & A_1\,\mathrm{Ch}(x_1+\theta) + A_2\,\mathrm{Ch}(x_2+\theta) + \ldots \\ & + B_1\,\mathrm{Sh}(y_1+\theta) + B_2\,\mathrm{Sh}(y_2+\theta) + \ldots = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} & A_1\,\mathrm{Sh}(x_1+\theta) + A_2\,\mathrm{Sh}(x_2+\theta) + \ldots \\ & + B_1\,\mathrm{Ch}(y_1+\theta) + B_2\,\mathrm{Ch}(y_2+\theta) + \ldots = 0. \end{aligned} \right.$$

En effet, si l'on multiplie la relation (7) par $\mathrm{Ch}\,\alpha$, si l'on retranche de (8) et si l'on divise par $\mathrm{Sh}\,\alpha$, on tombe sur la seconde des relations (6), et il n'y a plus qu'à appliquer le théorème précédent.

Ces diverses propositions peuvent être utilisées dans les calculs auxquels conduisent certaines questions de Géométrie analytique.