A.-E. PELLET

Sur les équations du quatrième degré et les fonctions elliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 14 (1886), p. 90-93

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__90_1>

Sur l'équation du quatrième degré et les fonctions elliptiques; par M. A.-E. Pellet.

(Séance du 17 mars 1886.)

1. Lorsque les racines d'une équation de degré pair $2m$ peuvent se partager en m groupes de deux racines satisfaisant à une relation de la forme

$$(1) \qquad a x_1 x_2 + b(x_1 + x_2) + c = 0,$$

les racines de chaque groupe étant inégales, on peut ramener l'équation à être réciproque ou à ne contenir que les puissances paires de l'inconnue par une substitution linéaire. Nous considérerons les deux cas, a différent de o et a nul.

Premier cas : $a \neq 0$. — L'équation devient réciproque en posant $x = \alpha z + \beta$ et paire en posant $x = \alpha \frac{y+\delta}{y-\delta} + \beta$, α étant égal à $\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$, β à $-\frac{b}{a}$, et δ une quantité indéterminée, différente de o.

Second cas : $a = 0$. — L'équation devient paire en posant $x = \alpha y - \frac{c}{2b}$, et réciproque en posant $x = \alpha \frac{z \pm 1}{z \mp 1} - \frac{c}{2b}$, α étant une quantité indéterminée.

2. Lorsqu'une équation du quatrième degré n'a pas de racines égales, on peut former de trois manières différentes deux groupes

de deux racines; à chaque manière correspond une relation de la forme (1), et, par conséquent, on peut amener l'équation à être paire ou réciproque de trois manières différentes. Soit l'équation

$$X^4 + 4PX^3 + 6QX^2 + 4RX + S = 0$$

ou, en posant $X = x - P$,

$$f(x) = x^4 + 6qx^2 + 4rx + s = 0.$$

Cherchons à rendre cette équation réciproque par la substitution $x = \alpha z + \beta$; on obtient les équations

$$[6f'(\beta)]^2 - f(\beta)[f'''(\beta)]^2 = 0, \qquad \alpha^2 = \frac{6f'(\beta)}{f'''(\beta)}.$$

La première développée devient

$$\varphi(\beta) = \beta^3 + \frac{s - 9q^2}{2r}\beta^2 - 3q\beta - \frac{r}{2} = 0,$$

en supposant r différent de 0; puis on a

$$\alpha^2 = 3\beta^2 + \frac{s - 9q^2}{r}\beta - 3q = \varphi'(\beta).$$

D'après sa formation, l'équation $\varphi(\beta) = 0$ admet comme racine toute racine multiple de l'équation $f(x) = 0$, avec le même degré de multiplicité, et réciproquement.

Supposons réels les coefficients de l'équation $f(x) = 0$. Il en est de même des coefficients de l'équation $\varphi(\beta) = 0$. Désignons par $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ ses trois racines; on a

$$\alpha_0^2 = \varphi'(\beta_0) = (\beta_0 - \beta_1)(\beta_0 - \beta_2);$$

par conséquent, lorsque les trois racines de l'équation en β sont réelles, les valeurs de α^2 correspondant à la plus grande et à la plus petite sont positives; si l'équation en β n'a qu'une racine réelle, la valeur correspondante de α^2 est positive.

Effectuons la substitution $x = \alpha\dfrac{y + \delta}{y - \delta} + \beta$, α, β, δ étant réels, ce qui est toujours possible d'après ce qui précède; et soit

$$Ay^4 + By^2 + C = 0$$

l'équation à laquelle on arrive. Les autres transformations pour obtenir une équation paire seront données par la formule

$$y = \sqrt[4]{\frac{C}{A}}\,\frac{z+\delta}{z-\delta};$$

donc, lorsque les racines de l'équation en β sont réelles, $\frac{C}{A}$ est positif, par suite les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont toutes réelles ou toutes imaginaires; lorsqu'une seule des trois valeurs de β est réelle, $\frac{C}{A}$ est négatif; l'équation $f(x) = 0$ a deux racines réelles et deux racines imaginaires conjuguées.

3. Ainsi les intégrales elliptiques peuvent se ramener par une transformation linéaire à la forme

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{Ax^4 + Bx^2 + C}},$$

où $F(x)$ est une fonction rationnelle. Si $F(x)$ est une fonction impaire, c'est-à-dire égale à $xf(x^2)$, $f(x^2)$ étant une fonction rationnelle, on voit, en prenant x^2 pour variable, que l'intégrale précédente se ramène à l'intégrale d'une fonction rationnelle. Si $F(x)$ n'est pas une fonction impaire, effectuons la substitution $x = \sqrt[4]{\frac{C}{A}}\,\frac{y+\delta}{y-\delta}$; il vient

$$\int \frac{-2\,F(x)\,\delta\sqrt[4]{\frac{C}{A}}\,dy}{\sqrt{A'y^4 + B'y^2 + C'}},$$

et, si $F\left(\sqrt[4]{\frac{C}{A}}\,\frac{y+\delta}{y-\delta}\right)$ est une fonction impaire, cette dernière se ramène à l'intégrale d'une fonction rationnelle; pour cela, il faut que l'on ait

$$F\left(\sqrt[4]{\frac{C}{A}}\,\frac{y+\delta}{y-\delta}\right) = -F\left(\sqrt[4]{\frac{C}{A}}\,\frac{y-\delta}{y+\delta}\right) \quad \text{ou} \quad F(x) = -F\left(\sqrt{\frac{C}{A}}\,\frac{1}{x}\right)$$

et, dans le cas où $F(x)$ est une fonction paire $F(x^2)$,

$$F(x^2) = -F\left(\frac{C}{Ax^2}\right);$$

ce qui renferme un résultat de M. Hermite (*Journal de M. Resal*; année 1880).

Considérons en particulier l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ et effectuons la substitution $x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{y+1}{y-1}$; on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{-2\,dy}{\sqrt{k}\sqrt{4(y^2+1)^2 - \frac{(1+k)^2}{k}(y^2-1)^2}}.$$

Posons

$$\frac{4k}{(1+k)^2} = k'^2, \qquad \frac{1}{k'}\frac{y^2-1}{y^2+1} = u,$$

il vient

$$u = \frac{x(1+k)}{1+kx^2}$$

et

$$(1+k)\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2u^2)}},$$

et l'on est conduit ainsi naturellement à l'échelle des modules de Lagrange (Bertrand, *Calcul intégral*, nos 650 et suiv.; 659).