BULLETIN DE LA S. M. F.

P. TANNERY

Sur un problème de Fermat

Bulletin de la S. M. F., tome 14 (1886), p. 41-45
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__41_1>

Sur un problème de Fermat; par Paul Tannery.

(Séance du 2 décembre 1885.)

1. Diophante ramène un de ses problèmes (V, 25) à la recherche de trois triangles rectangles en nombres (¹) tels, que le produit des trois hypoténuses par les trois hauteurs soit un nombre carré.

Il se donne ensuite l'un des trois triangles, soit (5, 3, 4); comme la hauteur de ce dernier, 4, est un carré, il reste donc à

(¹) On appelle ainsi un groupe de trois nombres (a, b, c), *entiers ou fractionnaires,* tels que $a^2 = b^2 + c^2$; a est l'hypoténuse du triangle rectangle, b sera la base, c la hauteur.

chercher deux triangles $(a_1 b_1 c_1)$, $(a_2 b_2 c_2)$, tels que

$$a_1 c_1 = 5 a_2 c_2. \tag{1}$$

Le reste du problème est corrompu.

Bachet a donné de la première des deux questions une solution assez élégante que Cossali a traduite depuis en langage algébrique, mais qui, n'étant, bien entendu, nullement générale, ne s'applique point à la forme spéciale (1) à laquelle conduit le texte de Diophante.

Fermat s'est proposé la divination de la solution perdue, mais il y a été moins heureux qu'ailleurs [1]. Au lieu de s'attacher au texte même, il a abordé le problème *a priori* d'une façon qu'on peut représenter comme suit :

Soit à traiter, en général, le problème

$$a_1 c_1 = m a_2 c_2; \tag{2}$$

d'après la théorie des triangles rectangles en nombres, on peut poser

$$a_1 = p^2 + q^2, \qquad c_1 = 2pq,$$
$$a_2 = r^2 + s^2, \qquad c_2 = 2rs,$$

p, q, r, s étant des indéterminées.

Si l'on suppose d'ailleurs $r = p$, l'équation (2) deviendra

$$q(p^2 + q^2) = ms(p^2 + s^2), \tag{3}$$

d'où

$$p^2 = \frac{q^3 - ms^3}{ms - q}.$$

Dans ses transformations subséquentes, Fermat a commis une erreur de signe, en sorte qu'il résout le problème de rendre carré le nombre $\frac{q^3 - ms^3}{q - ms}$, et non pas le problème qu'il s'était posé. Il a reconnu ensuite son erreur et, sans donner d'autres explications, s'est contenté d'affirmer qu'il avait résolu généralement la question et d'en donner une solution particulière, pour $m = 5$, en

[1] La solution de Diophante a été reconstituée d'après le texte de Bachet par le traducteur allemand, Schulz (Berlin, 1822); elle repose sur un artifice tout particulier et ne peut conduire aux nombres indiqués par Fermat.

nombres assez grands pour que l'on ne pût, dit-il, imputer leur découverte au hasard ([1]). Ces nombres sont les suivants :

$$a_1 = 48\,543\,669\,109, \qquad b_1 = 36\,083\,779\,309, \qquad c_1 = 32\,472\,275\,280,$$
$$a_2 = 42\,636\,752\,938, \qquad b_2 = 41\,990\,695\,400, \qquad c_2 = 7\,394\,200\,038.$$

2. Il est difficile de révoquer en doute l'affirmation de Fermat, qu'il a résolu généralement le problème; cependant il peut y être arrivé en abandonnant la voie qu'il avait d'abord essayée et en retrouvant soit l'artifice de Diophante, soit quelque autre semblable.

Si en effet, dans l'équation (3), on substitue

$$q = mt(x+1), \qquad s = t(x+m^2), \qquad p = ty,$$

on arrive à l'équation indéterminée

$$x^3 - 3m^2x - m^2(m^2+1) = y^2, \tag{4}$$

qui, sous sa forme générale, est incontestablement rebelle à toutes les méthodes de Diophante et de Fermat que l'on connaît.

Mais il est certain, d'un autre côté, que c'est au contraire en suivant sa première voie que Fermat a obtenu les nombres qu'il a donnés. Si l'on calcule en effet les nombres générateurs de ces triangles, il vient

$$p = r = 205\,703, \qquad q = 78\,930, \qquad s = 17\,973.$$

Ainsi nous retrouvons l'hypothèse fondamentale $p = r$, qui conduit à l'équation (4).

Il m'a paru intéressant d'appeler sur cette difficulté l'attention des mathématiciens.

En nous bornant d'ailleurs au cas spécial où $m = 5$, sur lequel ont porté les calculs de Fermat, l'équation (4) devient

$$x^3 - 75x - 650 = y^2; \tag{5}$$

nous rencontrons une nouvelle complication.

Il est facile de voir que, dans ce cas, nous avons une solution

---

([1]) Quæstionem ipsam Diophantæam nos iterum examini subjicientes et methodum nostram sedulo consulentes tandem generaliter solvimus. Exemplum tantum subjiciemus confisi numeros ipsos satis indicaturos non sorti, sed arti solutionem deberi.

immédiate ($p = r = 1$, $q = 2$, $s = 1$). A la vérité, elle ne permet pas de construire les triangles demandés par Diophante; mais, avec la méthode de Fermat, une première solution en donne une infinité d'autres par voie de dérivation successive.

Comme, en général,

$$x = m\frac{mq - s}{ms - q}, \qquad y = mp\frac{m^2 - 1}{ms - q},$$

cette solution immédiate correspond au couple de valeurs

$$x_1 = 15, \qquad y_1 = 40.$$

En substituant dans le premier membre de l'équation

$$x = 15 + x',$$

le terme constant devient le carré $(40)^2$, et l'équation transformée peut être traitée d'après la méthode de Diophante. On obtiendra ainsi une seconde valeur $x_2 = \frac{105}{4}$, d'où l'on pourra déduire les triangles suivants, satisfaisant au problème de Fermat :

$$a_1 = 87125, \qquad b_1 = 7923, \qquad c_1 = 86764,$$
$$a_2 = 46325, \qquad b_2 = 32877, \qquad c_2 = 32636.$$

Or ces nombres sont certainement déjà assez compliqués pour que Fermat les eût sans doute donnés, s'il avait fait la même déduction, d'autant qu'elle est une application d'une de ses méthodes. D'autre part, sa solution numérique n'a certainement pas été obtenue par cette voie; car, si l'on poursuit la recherche des solutions suivantes, on arrive presque immédiatement à des nombres beaucoup plus élevés que ceux qui correspondent aux triangles de Fermat.

La façon dont il a obtenu les nombres générateurs de ces triangles reste donc un mystère, et il peut être permis de penser que, quoi qu'il en ait dit, il aura été aidé par le hasard dans une certaine mesure.

Je ne prétends point au reste traiter la question à fond; je me bornerai aux quelques indications suivantes pour épargner des tentatives inutiles à ceux qui voudraient l'aborder.

Si (par une restriction spéciale) on pose

$$x = z^2 + \tfrac{1}{3},$$

en même temps que

$$y = z^3 + u,$$

l'équation (5) prend la forme

$$z^4 - A z^2 - B = 2 u z^3 + u^2.$$

D'après les valeurs numériques et la solution de Fermat, $B + u^2$ se trouve un carré, et, si l'on pose

$$B + u^2 = v^2 z^2,$$

on trouve $v = 2$.

L'équation proposée se ramène dès lors à

$$z^2 - 2 u z - A - v^2 = 0,$$

où

$$u^2 + A + v^2 = w^2,$$

et l'on prendra

$$z = u + w.$$

Si l'on se donne $v = 2$, on trouvera d'ailleurs que, pour obtenir ainsi la solution, A et B sont soumis à une double condition; si au contraire on cherche à déterminer v de manière à obtenir la solution en conséquence de cette détermination, on tombe sur une équation beaucoup plus complexe que la proposée.