BULLETIN DE LA S. M. F.

DE PRESLE

Détermination des nombres de Bernoulli

Bulletin de la S. M. F., tome 14 (1886), p. 100-103

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__100_1>

Détermination des nombres de Bernoulli; par M. de Presle.

(Séance du 6 juin 1886.)

1. *Exposé de la question.* — Les nombres de Bernoulli B sont définis par la relation

$$\frac{x}{2}\,\frac{e^x+1}{e^x-1}-1=B_1\frac{x^2}{1.2}-B_2\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots-(-1)^n B_n\frac{x^{2n}}{1.2\ldots(2n)}\pm\ldots.$$

La valeur de $\cot x$ est

$$\cot x = i\,\frac{e^{2xi}+1}{e^{2xi}-1}$$

et, en développant le second membre à l'aide de la relation précédente,

$$\cot x=\frac{1}{x}-B_1\frac{2^2x}{1.2}+B_2\frac{2^4x^3}{1.2.3.4}-\ldots-(-1)^n B_n\frac{2^{2n}x^{2n-1}}{1.2\ldots(2n)}\pm\ldots;$$

si nous désignons par C_n le coefficient de x^{2n-1}, nous aurons

$$C_n = (-1)^n \frac{2^{2n}}{1.2\ldots(2n)} B_n, \qquad B_n = (-1)^n \frac{1.2\ldots(2n)}{2^{2n}} C_n.$$

L'expression de la tangente se déduit de celle de la cotangente par la relation

$$\operatorname{tang} x = \cot x - 2\cot 2x;$$

on aura donc, pour le coefficient E_n de x^{2n-1}, dans $\operatorname{tang} x$,

$$E_n = -(2^{2n}-1)C_n$$

et, par suite,

$$E_n = (-1)^{n+1} \frac{(2^{2n}-1)2^{2n}}{1.2\ldots(2n)} B_n, \qquad B_n = (-1)^{n+1} \frac{1.2\ldots(2n)}{(2^{2n}-1)2^{2n}} E_n;$$

si donc nous connaissions le développement de $\operatorname{tang} x$, nous déduirions de la dernière égalité la valeur de B_n.

2. *Développement de la tangente en série entière.* — Nous allons d'abord nous proposer la détermination des dérivées successives de $\operatorname{tang} x$. Soit

$$\varphi(x) = a_n \cos^{-2n} x;$$

nous aurons

$$\varphi'(x) = 2na_n \cos^{-(2n+1)} x \sin x,$$
$$\varphi''(x) = 2n(2n+1)a_n \cos^{-2(n+1)} x \sin^2 x + 2na_n \cos^{-2n} x$$

ou bien

$$\varphi''(x) = 2n(2n+1)a_n \cos^{-2(n+1)} x - 4n^2 a_n \cos^{-2n} x.$$

La dérivée de $\operatorname{tang} x$ étant $\cos^{-2} x$, de la valeur de $\varphi''(x)$, on déduira les expressions successives des dérivées impaires de $\operatorname{tang} x$:

$$D_1 \operatorname{tang} x = 1 \cos^{-2} x,$$
$$D_3 \operatorname{tang} x = 1.2.3 \cos^{-4} x - 1.2^2.1^2.\cos^{-2} x,$$
$$D_5 \operatorname{tang} x = 1.2.3.4.5.\cos^{-6} x - 1.2.3.2^2(1^2+2^2)\cos^{-4} x$$
$$+ 12^4.1^4.\cos^{-2} x,$$
$$D_7 \operatorname{tang} x = 1.2.3.4.5.6.7 \cos^{-8} x - 1.2.3.4.5.2^2(1^2+2^2+3^2)\cos^{-6} x$$
$$+ 1.2.3.2^4(1^4+2^4+1^2 2^2)\cos^{-4} x - 1.2^6.1^6 \cos^{-2} x,$$
$$D_9 \operatorname{tang} x = 1.2.3.4.5.6.7.8.9 \cos^{-10} x$$
$$- 1.2.3.4.5.6.7.2^2(1^2+2^2+3^2+4^2)\cos^{-8} x$$
$$+ 1.2.3.4.5.2^4(1^4+2^4+3^4+1^2 2^2+2^2 3^2+3^2 1^2)\cos^{-6} x$$
$$- 1.2.3.2^6(1^6+2^6+1^4 2^2+1^2 2^4)\cos^{-4} x + 1.2^8.1^8 \cos^{-2} x.$$

Désignons par $S_1^q(z^2)^r$ la somme des produits obtenus en prenant les nombres $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, q^2$ et, en formant avec eux tous les produits possibles de degré $2r$ avec répétition, nous apercevons la loi de formation suivante :

$$\begin{aligned}
D_{2n+1}\operatorname{tang} x = {} & 1.2\ldots(2n+1)\cos^{-2(n+1)}x \\
& -1.2\ldots(2n-1)2^2 S_1^n(z^2)^1\cos^{-2n}x \\
& +1.2\ldots(2n-3)2^4 S_1^{n-1}(z^2)^2\cos^{-2(n-1)}x - \ldots \\
& +(-1)^p 1.2\ldots[2(n-p)+1]2^{2p}S_1^{n-p-1}(z^2)^p\cos^{-2(n-p+1)}x \\
& +(-1)^{p+1}.1.2\ldots[2(n-p)-1].2^{2(p+1)}S_1^{n-p}(z^2)^{p+1}\cos^{-2(n-p)}x \pm \ldots
\end{aligned}$$

Supposons cette loi vraie pour $D_{2n+1}\operatorname{tang}x$, elle le sera encore pour $D_{2n+3}\operatorname{tang}x$; en effet :

Dans $D_{2n+3}\operatorname{tang}x$, le coefficient de $\cos^{-2(n-p+1)}x$ sera

$$\begin{aligned}
& (-1)^{p+1}2(n-p)[2(n-p)+1].1.2\ldots[2(n-p)-1]2^{2(p+1)}S_1^{n-p}(z^2)^{p+1} \\
& \quad -(-1)^p 2^2(n-p+1)^2 1.2\ldots[2(n-p)+1]2^{2p}S_1^{n-p+1}S(z^2)^p
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
& (-1)^{p+1}.1.2\ldots[2(n-p)+1]2^{2(p+1)}[S_1^{n-p}(z^2)^{p+1} \\
& \quad +(n-p+1)^2 S_1^{n-p+1}(z^2)^p]
\end{aligned}$$

ou encore

$$(-1)^{p+1}1.2\ldots\{2[(n+1)-p]-1\}\,2^{2(p+1)}S_1^{n+1-p}(z^2)^{p+1},$$

car on a

$$S_1^q(z^2)^r = S_1^{q-1}(z^2)^r + q^2 S_1^q(z^2)^{r-1};$$

la loi est donc générale.

3. *Expression des nombres de Bernoulli.* — Dans l'expression de $D_{2n+1}\operatorname{tang}x$ supposons x nul ; nous avons

$$\begin{aligned}
& 1.2\ldots(2n+1) - 1.2\ldots(2n-1)2^2 S_1^n(z^2)^1 + \ldots \\
& \quad +(-1)^{p+1}.1.2\ldots[2(n-p)-1]2^{2(p+1)}S_1^{n-p}(z^2)^{p+1}.
\end{aligned}$$

Cette expression, divisée par $1.2\ldots(2n+1)$, est le coefficient de x^{2n+1} dans le développement de $\operatorname{tang}x$; nous avons donc

$$\begin{aligned}
E_n = 1 & - \frac{2^2}{2n(2n+1)}S_1^n(z^2)^1 + \ldots \\
& +(-1)^{p+1}\frac{2^{2(p+1)}}{2(n-p)[2(n-p)+1]\ldots(2n+1)}S_1^{n-p}(z^2)^{p+1} \pm \ldots \\
& +(-1)^n\frac{2^{2n}}{1.2\ldots(2n+1)}
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$
\begin{aligned}
B_n = (-1)^{n+1} \frac{1.2\ldots(2n)}{(2^{2n}-1)\,2^{2n}} \Big[1 - \frac{2^2}{2n(2n+1)} S_1^n (2^2)^1 + \ldots \\
+ (-1)^{p+1} \frac{2^{2(p+1)}}{2(n-p)[2(n+p)+1]\ldots(2n+1)} S_1^{n-p} (z^2)^{p+1} \pm \ldots \\
+ (-1)^n \frac{2^{2n}}{1.2\ldots(2n+1)} \Big].
\end{aligned}
$$