BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HUMBERT

Sur les surfaces homofocales du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 13 (1885), p. 95-119

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1885__13__95_1>

Sur les surfaces homofocales du second ordre;
Par M .G. HUMBERT.

(Séance du 1er avril 1885.)

Le présent travail a pour but d'exposer, à l'aide d'une méthode spéciale de démonstration, un certain nombre de propriétés des quadriques homofocales, dont les unes sont déjà connues et dont les autres me semblent nouvelles : cette méthode s'applique également aux surfaces du quatrième degré à conique double, ainsi que je l'ai fait voir dans un Mémoire qui paraîtra prochainement.

1. Soient E une surface du second ordre, σ_1 une conique quelconque située dans le plan de l'infini, et passant par les quatre points communs à E et au cercle de l'infini.

Je dirai que deux points a et b et de E sont conjugués dans le système σ_1 si la droite ab rencontre la conique σ_1 : d'après cela, deux points de E, situés l'un ou l'autre à distance finie, sont conjugués dans un système et dans un seul.

Les droites joignant deux points de E conjugués dans un système σ_1 sont donc parallèles aux génératrices d'un cône H du second ordre, homocyclique à E, et réciproquement.

Une sphère quelconque, S, coupe E suivant une courbe par laquelle on peut faire passer quatre cônes du second ordre, homocycliques à E : les génératrices d'un de ces cônes coupent donc E en des points a et b, a' et b', ... conjugués dans un même système.

Les points a et b, a' et b', situés sur deux de ces génératrices, sont dans un même plan et par suite sur un cercle de la sphère S; il en résulte aisément que :

Tout cercle qui passe par deux points de E *coupe cette surface en deux nouveaux points conjugués dans le même système;* et réciproquement : *si quatre points de* E *sont sur un cercle, deux d'entre eux sont conjugués dans le même système que les deux autres.*

Je dirai qu'une sphère S appartient *au groupe σ_1 de sphères,* si l'un des cônes du second ordre, passant par l'intersection de E et de S, contient la conique σ_1 : une sphère appartient donc à quatre groupes.

D'après cela, le cône H, qui a pour base la conique σ_1 et pour sommet un point quelconque m de l'espace, coupe E suivant une courbe située sur une sphère S, appartenant au groupe σ_1. Si le point m s'éloigne à l'infini sur une droite rencontrant la conique σ_1, le cône H se décompose à la limite en deux plans, dont l'un est le plan de l'infini et dont l'autre touche en m la conique σ_1. En ce cas, la sphère S se décompose également en ces deux mêmes plans.

Il en résulte que les plans qui touchent la conique σ_1 peuvent être considérés comme des sphères de rayon infini, appartenant au groupe σ_1.

La notion des groupes de sphères est très importante dans la théorie qui va suivre, et c'est l'étude des propriétés communes aux sphères d'un même groupe qui formera l'objet principal de ce travail; une notion corrélative et aussi importante est celle des groupes de cercles bitangents.

Je dirai qu'un cercle tangent à une quadrique E en deux points a et b appartient au groupe σ_1 de cercles bitangents si les points a et b sont conjugués dans le système σ_1.

Si a' et b' sont respectivement les points infiniment voisins de a et de b sur le cercle bitangent, il résulte d'une proposition établie plus haut que a' et b' sont conjugués, comme a et b, dans le système σ_1, et par suite que le plan du cercle bitangent touche la conique σ_1.

Toute sphère passant par un cercle bitangent du groupe σ_1 appartient au groupe σ_1 de sphères.

Car cette sphère, S, coupe E suivant une courbe λ, tangente aux points a et b au cercle bitangent considéré. Il en résulte aisément, si l'on se reporte aux propriétés connues des courbes communes à une sphère et à une quadrique, qu'un des cônes du second ordre contenant la courbe λ a son sommet sur la droite ab, et que ab est une de ses génératrices. Ce cône coupe donc le plan de l'infini suivant la conique σ_1, et par suite la sphère S appartient au groupe σ_1 de sphères.

2. Ces principes établis, nous démontrerons d'abord le théorème suivant, qui est fondamental pour notre objet.

THÉORÈME I. — *Le lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant à un même groupe, par rapport à une surface* E *du second ordre, est une surface du second ordre homofocale à la première.*

Ce théorème repose sur deux lemmes.

Lemme I. — Le lieu des points conjugués dans un système σ_1 d'un point a de E est la courbe commune à E et à un cône du second ordre K, de sommet a, passant par la conique σ_1. Cette courbe est sur une sphère Ω, qui touche E au point a.

Lemme II. — Le lieu des centres des sphères du groupe σ_1 qui passent par le point a de E est un cône du second ordre, supplémentaire du cône K et dont le sommet coïncide avec le centre de la sphère Ω.

Soit, en effet, S une sphère du groupe σ_1 passant par a; on voit sans difficulté que cette sphère coupe Ω, suivant un cercle tangent à E au point a, et en un autre point b, conjugué de a dans le système σ_1; le plan de ce cercle touche d'ailleurs la conique σ_1. Il en résulte que le centre de la sphère S est sur une perpendiculaire menée du centre de Ω sur un plan tangent au cône K, ce qui démontre le lemme.

Cela posé, soit δ une droite quelconque rencontrant le cercle de l'infini, et coupant E en deux points c et d; cherchons en combien de points elle coupe le lieu E_1 des centres des sphères de rayon nul appartenant au groupe σ_1.

Si g est un de ces points, la sphère de rayon nul de centre g contient la droite δ, et, comme elle appartient par hypothèse au groupe σ_1, son centre sera (lemme II) sur le cône du second ordre qui contient les centres des sphères du groupe σ_1 passant par c. Inversement, si g est un point commun à δ et à ce cône, la sphère de centre g passant par c appartiendra au groupe σ_1 et aura évidemment un rayon nul. Il en résulte que le lieu E_1 n'a que deux points à distance finie sur la droite δ.

Si δ est une génératrice de la développable circonscrite à E et au cercle de l'infini, les points c et d sont confondus, et la normale à E au point c coïncide avec la droite δ. Or le sommet du cône qui contient les centres des sphères passant par c et appartenant au groupe σ_1 est sur la normale à E au point c (lemmes I et II); il est donc sur δ et les deux points où δ coupe ce cône, c'est-à-dire que les deux points où δ coupe E_1 sont confondus.

On voit d'ailleurs, sans difficulté, que E_1 coupe le cercle de l'infini aux quatre points de contact des tangentes communes à ce cercle et à la conique σ_1. Il en résulte que le cercle de l'infini ne fait pas partie du lieu E_1 et, par suite, que ce lieu est une surface du second ordre, inscrite dans la développable circonscrite à E et au cercle de l'infini, c'est-à-dire une surface du second ordre homofocale à E. C. Q. F. D.

Le calcul vérifie aisément ces conclusions. Soient en effet

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-1=0,$$

$$x^2+y^2+z^2+\theta\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\right)=0$$

les équations de E et d'un cône H homocyclique à cette surface, coupant le plan de l'infini suivant une conique qui sera la conique σ_1.

L'équation d'un cône parallèle à H, ayant pour sommet un point α, β, γ de l'espace, est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 \\ +\theta\left[\frac{(x-\alpha)^2}{a}+\frac{(y-\beta)^2}{b}+\frac{(z-\gamma)^2}{c}\right]=0.$$

et l'équation de la sphère, du groupe σ_1, qui passe par la courbe commune à ce cône et à E,

$$0=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 \\ +\theta\left[\frac{\alpha(\alpha-2x)}{a}+\frac{\beta(\beta-2y)}{b}+\frac{\gamma(\gamma-2z)}{c}+1\right].$$

Soient x, y, z les coordonnées du centre de cette sphère, R son rayon. On a la relation

$$\frac{x^2}{a+\theta}+\frac{y^2}{b+\theta}+\frac{z^2}{c+\theta}-1=\frac{R^2}{\theta}.$$

Si $R^2=0$, cette relation montre bien que le lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant au groupe σ_1 est une quadrique E_1 homofocale à E; elle fait voir de plus que :

Le lieu des centres des sphères de rayon donné, appartenant à un groupe σ_1 par rapport à une quadrique E, *est une quadrique concentrique et homothétique à une quadrique homofocale à* E.

3. Soit a un point de la courbe commune à E et à E_1, la sphère

de rayon nul de centre a coupe E suivant une courbe par laquelle on peut faire passer un cône du second ordre contenant la conique σ_1 ; ce cône touche évidemment E au point a, et par suite :

Les plans tangents menés à une surface du second ordre le long d'une ligne de courbure sont parallèles aux plans tangents d'un cône homocyclique à cette surface.

On pourrait démontrer directement, en s'appuyant sur ce qui précède, que la courbe commune à E et à E_1 est une ligne de courbure de ces deux surfaces, et que E et E_1 se coupent à angle droit.

4. Le théorème du n° 2 est susceptible de nombreuses applications.

Soient α la courbe commune à E et à une sphère S, H un des quatre cônes du second ordre passant par cette courbe. Toute génératrice de H rencontre α en deux points a et b, conjugués dans un système fixe σ_1, et le cercle qui touche E en ces deux points est à l'intersection de S et du plan tangent à H le long de ab : ce cercle fait partie du groupe σ_1 de cercles bitangents à E. En d'autres termes, les cercles bitangents à une courbe sphérique tracée sur E forment quatre séries, et les cercles d'une même série font partie d'un même groupe σ_1, de cercles bitangents à E.

Toute sphère passant par un de ces cercles appartient (n° 1) au groupe σ_1 de sphères; et, si elle a un rayon nul, son centre est situé (théorème I) sur une quadrique E_1, homofocale à E.

D'un autre côté, on sait que les sphères de rayon nul qui passent par les cercles d'une même série, bitangents à une courbe sphérique située sur une quadrique, ont leurs centres sur une autre courbe sphérique du quatrième ordre, qu'on nomme *focale* de la première; une courbe sphérique tracée sur une quadrique a ainsi quatre focales; et il résulte de ce qui précède que :

Les quatre focales d'une courbe sphérique tracée sur une quadrique sont sur quatre surfaces du second ordre, homofocales à la proposée.

D'une manière plus générale, toute sphère du groupe σ_1 coupe E suivant une courbe dont une des focales est sur la quadrique E_1, lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant au groupe σ_1. On peut donc énoncer cette *première propriété générale des sphères d'un même groupe* :

Les courbes communes à une quadrique et aux sphères appartenant à un même groupe par rapport à cette quadrique ont une de leurs focales sur une même quadrique, homofocale à la proposée.

On sait que les focales de la courbe α, commune à une sphère S et à une quadrique E, sont respectivement sur quatre sphères, orthogonales à S, et dont les centres coïncident avec les sommets des quatre cônes du second ordre qui passent par la courbe α. Il en résulte aisément la proposition suivante :

Soient α *la courbe commune à une quadrique* E *et à une sphère* S, *du centre* O ; α_1 *une focale de* α, *située sur une quadrique* E_1, *homofocale à* E, *et sur une sphère* S_1, *de centre* O_1 : *le plan polaire de* O *par rapport à* E_1, *le plan polaire de* O_1 *par rapport à* E, *et le plan radical des sphères orthogonales* S *et* S_1 *coïncident.*

Il en résulte facilement qu'on ne peut, d'un point O comme centre, décrire qu'une seule sphère appartenant à un groupe donné σ_1, et le théorème précédent donne de suite le moyen de la construire.

Il existe une autre relation de position entre les courbes α et α_1.

La développable circonscrite à E_1 le long de la courbe α_1 est une développable du huitième ordre, ayant pour lignes doubles quatre coniques : on peut appeler *focales* d'une telle surface les droites par lesquelles on peut mener deux plans, tangents à la fois à cette développable et au cercle de l'infini. Il y a en général huit plans tangents à la développable et au cercle de l'infini, et par conséquent 28 focales. Cette définition est la même que celle des focales d'un cône.

Cela posé, remarquons que les plans tangents à E_1 et au cercle de l'infini touchent E_1 le long d'une courbe du quatrième ordre, rencontrant en huit points la sphère S_1, et par suite la courbe α_1. Il y a donc huit plans tangents à la fois à E_1, à la courbe α_1 et au cercle de l'infini. Or α_1 est focale de α, en d'autres termes, les plans tangents à α_1 et au cercle de l'infini touchent α; de même les plans tangents communs à E_1 et au cercle de l'infini touchent E.

Il en résulte que la développable circonscrite à E le long de α et celle circonscrite à E_1 le long de α_1 ont huit plans tangents communs et que ces plans touchent le cercle de l'infini : ces deux développables ont donc mêmes focales.

Ainsi :

La développable circonscrite à une quadrique le long d'une courbe sphérique et la développable circonscrite à une quadrique homofocale, le long d'une focale de cette courbe, sont homofocales.

Ces propositions restent évidemment vraies quand la sphère S se réduit à un plan ; on obtient alors les propriétés suivantes, qu'on aurait pu déduire d'un théorème démontré plus loin (n° 7) et dû à M. Darboux.

Les deux focales d'une conique (α) *tracée sur une quadrique* (E) *sont sur deux quadriques* (E_1) *et* (E_2), *homofocales à la proposée.*

Soient α_1 et α_2 ces deux focales :

Les cônes circonscrits aux quadriques E, E_1 *et* E_2 *respectivement le long des coniques* α, α_1 *et* α_2 *sont homofocaux.*

Ils ont donc en particulier même sommet.

Si l'on remarque que les plans parallèles à un plan donné P appartiennent à un même groupe par rapport à E, et que ce groupe reste le même quand P varie en restant tangent à un cône homocyclique à E, on voit que :

Les focales des coniques, situées à l'intersection d'une quadrique et d'une série de plans parallèles, restent sur deux quadriques, homofocales à la proposée.

Les coniques communes à une quadrique E *et à tous les plans parallèles aux plans tangents d'un même cône, homocyclique à cette surface, ont une de leurs focales sur une quadrique homofocale à* E.

Les axes des sections faites dans E par une série de plans parallèles entre eux décrivent deux plans ; par suite :

Les foyers des sections faites dans une surface du second *ordre* E, *par une série de plans parallèles, décrivent deux coniques, situées sur deux quadriques homofocales à* E; *une de ces quadriques reste fixe si les plans sécants restent parallèles aux plans tangents d'un cône homocyclique à* E.

Remarque. — On sait que chacune des focales d'une courbe située à l'intersection d'une quadrique E et d'une sphère S coupe orthogonalement cette sphère en quatre points situés sur un cercle, et qu'on appelle *foyers associés* de la courbe sphérique.

Il résulte de ce qui précède que :

Par quatre foyers associés de la courbe commune à une quadrique E *et à une sphère* S, *passe une quadrique homofocale à la première et normale en ces points à la sphère* S.

D'un autre côté, une sphère est normale à une quadrique E en quatre points situés sur la conique polaire du centre de la sphère; il en résulte que :

Le lieu des foyers des courbes communes à une sphère fixe et à une série de quadriques homofocales coïncide avec le lieu des points où cette sphère est normale à ces quadriques.

Le lieu des foyers des courbes communes à une série de quadriques homofocales et à une série de sphères concentriques coïncide avec le lieu des points de contact des plans menés tangentiellement aux quadriques par le centre des sphères.

En particulier :

Le lieu des foyers des sections faites par un même plan dans une série de quadriques homofocales coïncide avec le lieu des pieds des normales à ces surfaces, contenues dans le plan.

Ce dernier lieu a été étudié par M. Chasles : c'est une courbe du troisième ordre. De même :

Le lieu des foyers des sections faites dans une série de quadriques homofocales par une série de plans parallèles entre eux coïncide avec le lieu des pieds des normales qu'on peut mener à ces quadriques parallèlement aux plans considérés.

5. Si l'on se reporte à un théorème donné au n° 2, on voit, comme plus haut, que :

Les centres des sphères de rayon donné, doublement tangentes à une courbe sphérique tracée sur une quadrique E, *décrivent quatre courbes sphériques du quatrième ordre; chacune d'elles est sur une quadrique concentrique et homothétique à une quadrique homofocale à* E.

Les autres théorèmes du numéro précédent se généraliseraient d'une manière analogue.

6. En vertu du théorème I, tout point a situé à l'intersection de E et d'une quadrique homofocale E_1 est le centre d'une sphère de rayon nul appartenant à un groupe σ_1 ; en d'autres termes, cette sphère coupe E suivant une courbe située sur un cône passant par la conique σ_1. Ce cône touche, comme on l'a dit, la quadrique E au point a; et, puisque les cercles communs à la sphère et aux plans tangents du cône sont des cercles bitangents à E, faisant partie du groupe σ_1, il en résulte que le cercle de rayon nul de centre a, situé dans le plan tangent à E au point a, pourra être considéré comme un cercle bitangent du groupe σ_1.

Par suite, toute sphère passant par ce cercle, c'est-à-dire toute sphère tangente en a à la quadrique E, appartiendra au groupe σ_1. Si de plus on remarque que par un point a de E passent deux quadriques homofocales à E, on voit que :

Toutes les sphères tangentes à une quadrique E *en un même point appartiennent à deux mêmes groupes.*

Toutes les sphères tangentes à une quadrique E *en tous les points d'une ligne de courbure appartiennent à un même groupe.*

Par suite :

Les sphères tangentes à une quadrique E *en tous les points d'une ligne de courbure coupent cette quadrique suivant des courbes qui ont une de leurs focales sur la quadrique homofocale à* E *qui contient la ligne de courbure considérée.*

Les sphères tangentes à une quadrique E *en un même point a ont deux de leurs focales situées respectivement sur les deux quadriques homofocales à* E *qui passent par le point a.*

On a vu que les sphères de rayon donné appartenant à un même groupe ont leurs centres sur une quadrique, concentrique et homothétique à une surface homofocale à E; par suite :

Sur les normales menées à une quadrique E *le long d'une ligne de courbure située sur une surface homofocale* E_1, *portons de part et d'autre du pied une longueur constante : le lieu des points ainsi déterminés sera une courbe gauche, située sur une quadrique concentrique et homothétique à* E_1.

7. *Les sphères d'une même série, bitangentes à une quadrique* Q *inscrite dans une surface du second ordre* E, *appartiennent à un même groupe par rapport à* E.

Par sphères d'une même série bitangentes à Q, j'entends les sphères bitangentes qui ont leurs centres dans un même plan principal de Q.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de remarquer que les cercles de Q, situés dans des plans parallèles entre eux, sont bitangents à E, et que la droite qui joint les deux points de contact a une direction fixe. Il en résulte que ces cercles, bitangents à E, appartiennent à un même groupe, et par suite que les sphères bitangentes à Q, qui contiennent un de ces cercles, font aussi partie d'un même groupe.

De là se déduisent immédiatement les propositions suivantes (théorème I) :

Les focales d'une quadrique inscrite dans une quadrique E *sont sur trois surfaces du second ordre, homofocales à* E. (DARBOUX.)

Les sphères d'une même série, bitangentes à une quadrique Q, *inscrite dans une surface du second ordre* E, *coupent cette dernière suivant des courbes qui ont une de leurs focales sur une même quadrique, homofocale à* E. *Cette quadrique contient la focale de* Q, *située dans le plan principal qui renferme les centres des sphères bitangentes considérées.*

Le théorème suivant, analogue à celui qu'on vient de démontrer, donne lieu à des conséquences analogues.

Les sphères inscrites à une surface de révolution du second *ordre bitangente à une quadrique appartiennent à un même groupe par rapport à cette quadrique.*

Soit en effet S une de ces sphères, touchant la surface de révolution R suivant un cercle γ : ce cercle coupe les coniques α et β communes aux surfaces bitangentes R et E en des points a et b, a' et b' ; et en ces points, en a et b par exemple, la tangente à la courbe d'intersection de S et de E coïncide avec la tangente à la conique α. En d'autres termes, le plan de cette conique touche en a et b la courbe commune à S et à E; cette courbe est donc sur un cône du second ordre H (homocyclique à E), passant par la droite ab. Or les plans des cercles γ ayant une même direction, il en est de même des droites ab, et les cônes H ont cinq points communs à l'infini : ils coupent donc le plan de l'infini suivant une même conique σ_1, et par suite les sphères S, inscrites à R, appartiennent à un même groupe par rapport à E.

On démontrerait, par des considérations analogues à celles qui précèdent et à celles du n° 7, les deux propositions suivantes, dans lesquelles on désigne par *cyclide* une surface quelconque ayant le cercle à l'infini pour ligne double.

Les sphères bitangentes à une cyclide forment cinq séries : les sphères d'une même série, bitangentes à une cyclide inscrite dans une quadrique E *suivant une courbe sphérique, appartiennent à un même groupe par rapport à* E.

Les sphères inscrites à une cyclide à deux points doubles, tangente en quatre points à une quadrique E, *appartiennent à un même groupe par rapport à cette quadrique.*

De ces propositions et du théorème démontré au commencement du n° 7, on déduit diverses conséquences relatives aux sphères appartenant à un même groupe par rapport à une quadrique E.

Proposons-nous, par exemple, de chercher l'enveloppe des sphères d'un groupe donné, et dont les centres sont dans un plan donné P.

Les quadriques inscrites à E et ayant P comme plan principal sont en nombre simplement infini ; les sphères bitangentes à l'une d'elles appartiennent à un même groupe par rapport à E; on conclut aisément, puisque d'un point donné comme centre on ne peut décrire qu'une sphère d'un groupe donné, que l'enveloppe cherchée est une quadrique inscrite à E, ayant P pour plan principal.

Ainsi :

L'enveloppe des sphères appartenant à un même groupe par rapport à une quadrique E *et ayant leurs centres dans un plan donné est une quadrique symétrique par rapport à ce plan et inscrite à* E.

On verrait de même que :

Les sphères appartenant à un même groupe par rapport à E *et ayant leurs centres sur une droite donnée enveloppent une quadrique, de révolution autour de cette droite, et bitangente à* E.

L'enveloppe des sphères d'un même groupe par rapport à E *et orthogonales à une sphère donnée est une cyclide qui admet cette sphère pour sphère directrice, et qui touche* E *suivant une courbe sphérique.*

La sphère considérée peut avoir un rayon nul.

L'enveloppe des sphères d'un même groupe passant par un point est une cyclide qui a un point conique en ce point et qui touche E *suivant une courbe sphérique.*

L'enveloppe des sphères appartenant à un même groupe par rapport à E *et passant par deux points donnés est une cyclide qui a un point conique en chacun de ces points et qui touche la quadrique* E *en quatre points.*

8. La théorie du numéro précédent nous permet de traiter ce problème :

Construire une quadrique (Q), *inscrite à une quadrique donnée* (E) *et bitangente à deux sphères données,* S *et* S_1; *avec la condition que les centres de ces sphères,* o *et* o_1, *soient dans un même plan principal de* Q.

Les conditions imposées à la quadrique Q, ainsi définie, sont au nombre de neuf; néanmoins *le problème est généralement impossible;* il faut évidemment, pour qu'il le devienne, que les sphères S et S_1 appartiennent à un même groupe (n° 7). *Si cette* *condition est remplie, il y a une infinité de quadriques répondant à la question.*

En effet, soit S_2 une troisième sphère, de centre o_2, appartenant au même groupe que S et S_1 : les sphères de ce groupe ayant leurs centres dans le plan $o o_1 o_2$ enveloppent une quadrique qui répond à la question.

C'est là une *deuxième propriété générale des sphères d'un même groupe;* on peut l'énoncer ainsi :

On peut toujours construire une quadrique inscrite à une quadrique donnée E, *et bitangente à trois sphères appartenant à un même groupe par rapport à* E.

On voit de même que :

On peut toujours construire une quadrique bitangente à une quadrique donnée E *et inscrite à deux sphères appartenant à un même groupe par rapport à* E.

Si l'on remarque qu'une sphère S appartient à quatre groupes par rapport à E, on a la proposition suivante :

Les quadriques inscrites à une quadrique E *et bitangentes à une sphère* S *se partagent en quatre classes : les quadriques d'une même classe ont celle de leurs focales, dont le plan passe par le centre de la sphère* S, *située sur une même quadrique* E_1 *homofocale à* E.

Une des quatre quadriques E_1, *ainsi définies, reste fixe si la sphère considérée varie sans cesser d'appartenir à un même groupe par rapport à* E.

Ces quatre quadriques sont celles qui contiennent respectivement les quatre focales de la courbe commune à la quadrique E *et à la sphère* S.

De là résulte une conséquence intéressante :

Les quadriques d'une même classe, inscrite à la quadrique E *et bitangentes à la sphère* S, *ont leurs centres sur une surface du second ordre, lieu des centres des sections faites dans la quadrique* E_1, *par les plans issus du centre de la sphère.*

En transformant par homographie, on voit que :

Le lieu des centres des quadriques inscrites à une quadrique *donnée* A *et bitangentes à une quadrique donnée* B *se décompose en quatre surfaces du second ordre, qui passent par les centres des deux premières.*

On démontrerait d'une manière analogue que :

Les quadriques de révolution bitangentes à une quadrique E *et inscrites à une sphère* S *se divisent en quatre classes : les quadriques d'une même classe ont leurs deux foyers sur une même quadrique* E_1, *homofocale à* E.

Les quatre quadriques E_1, *ainsi définies, sont celles qui contiennent respectivement les quatre focales de la courbe commune aux surfaces* E *et* S.

Ce sont donc celles que nous avons rencontrées tout à l'heure :

Le lieu des centres des quadriques d'une même classe, inscrites à la sphère S *et bitangentes à la quadrique* E, *est une surface du second ordre, lieu des milieux des cordes de la quadrique* E_1, *issues du centre de la sphère.*

Ce lieu est évidemment le même que celui des centres des sections faites dans E_1 par des plans issus du même point. Donc :

Le lieu des centres des quadriques inscrites à une quadrique A *et bitangentes à une autre quadrique* B *est le même que le lieu des centres des quadriques inscrites à* B *et bitangentes à* A.

Des conséquences d'un autre ordre sont relatives aux lignes doubles de la développable circonscrite à une quadrique E et à une sphère S.

Une telle développable a pour lignes doubles quatre coniques : un point *m* de l'une d'elles est le sommet d'un cône, H, circonscrit à E et bitangent à S. Or cette sphère appartient à quatre groupes, σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 ; les sphères bitangentes au cône H, appartenant à la même série que S, feront donc partie d'un de ces groupes, en vertu du théorème démontré au commencement du n° 7. En particulier, la sphère de rayon nul, ayant pour centre le sommet *m* du cône, appartiendra à un de ces groupes, σ_1 par exemple, et le point *m* sera (théorème I) sur la quadrique E_1, homofocale à E, lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant au groupe σ_1. On en déduit sans difficulté les théorèmes suivants :

Les quatre lignes doubles de la développable circonscrite à une quadrique E *et à une sphère sont sur quatre quadriques, homofocales à* E (Chasles). *Chacune de ces quadriques contient une des focales de la courbe commune à la surface* E *et à la sphère considérée.*

On a de plus cette *troisième propriété générale des sphères d'un même groupe.*

Les développables, circonscrites à une quadrique E *et à chacune des sphères appartenant à un groupe donné par rapport à cette quadrique, ont une de leurs lignes doubles sur une même quadrique, homofocale à* E, *qui contient également une des focales des courbes communes à la quadrique* E *et aux sphères considérées.*

En particulier :

Les développables circonscrites à une quadrique et aux différentes sphères qui passent par un même cercle bitangent à cette surface ont une de leurs lignes doubles sur une même quadrique, homofocale à la proposée.

Les théorèmes des n^{os} 7 et 8 permettent évidemment de donner à cette proposition générale plusieurs formes différentes.

9. Considérons un cercle bitangent du groupe σ_1, touchant E aux points a et b, et par ce cercle menons une sphère S, tangente à E en un point m différent des points a et b : la sphère S coupe E suivant une courbe ayant un point double en m, et située sur un cône H, passant par la conique σ_1. Ce cône (dont le sommet est sur la droite ab) est donc tangent à E au point m. En d'autres termes, le plan tangent à E au point m touche la conique σ_1 ; m est donc (n° 3) sur la ligne de courbure commune à E et à la quadrique homofocale E_1, lieu des centres des sphères de rayon nul appartenant au groupe σ_1. De là résulte ce théorème, qui exprime une *propriété générale des cercles bitangents d'un même groupe :*

Par tous les cercles bitangents à une quadrique E *et appar-*

tenant à un groupe donné, menons des sphères tangentes à E; *les points de contact sont sur une même ligne de courbure de cette quadrique* (¹).

On suppose que la sphère menée par un cercle bitangent touche E en un point non situé sur ce cercle.

Comme on l'a dit plus haut (n° 4), toute courbe sphérique tracée sur E admet quatre séries de cercles bitangents, et les cercles d'une même série font partie d'un même groupe; donc :

Les sphères d'une même série, bitangentes à une courbe sphérique tracée sur une quadrique et simplement tangentes à cette surface la touchent suivant une ligne de courbure.

La courbe sphérique peut se réduire à deux cercles, dont l'un peut être de rayon nul :

Les sphères d'une même série, tangentes à deux cercles situés sur une quadrique, et simplement tangentes à cette surface, la touchent suivant une ligne de courbure.

De même, pour *les sphères passant par un ombilic et tangentes à un cercle situé sur la quadrique.....*

On suppose que les deux cercles considérés sont une même sphère.

La courbe sphérique peut devenir plane ; il n'y a plus alors que deux séries de sphères bitangentes.

Les sphères d'une même série, bitangentes à une conique située sur une quadrique et simplement tangentes à cette surface, la touchent suivant une ligne de courbure, qui passe par les extrémités du diamètre conjugué du plan de la conique.

Les sphères d'une même série tangentes aux deux génératrices qui passent par un point a d'une quadrique, et simplement tangentes à cette surface, la touchent suivant une ligne de courbure passant par a.

On peut compléter ces résultats comme il suit :

(¹) Rappelons, pour faciliter l'interprétation géométrique de ce théorème, que les cercles bitangents d'un même groupe sont ceux qui touchent la quadrique E en deux points *a* et *b*, tels que les droites *ab* soient parallèles aux génératrices d'un cône homocyclique à E.

On a montré que le point de contact, m, avec E, d'une sphère passant par un cercle d'une groupe donné, tangent à E aux points a et b, est sur une ligne de courbure fixe de E : *Cette ligne de courbure est normale en* m *au cercle qui passe par les points* a, b, m.

10. On peut se proposer d'étudier les lignes de courbure d'une quadrique dans la Géométrie de M. Cayley ; nous n'envisagerons qu'un cas particulier de ce problème, et nous arriverons ainsi à une extension simple des résultats obtenus plus haut. — Étant donnée une conique α, on appelle normale (par rapport à α), en un point a d'une surface E, la droite qui joint a au pôle, par rapport à la conique α, du plan tangent à la surface au point a.

Les lignes de courbure, dans cette géométrie, sont alors des courbes telles, que les normales à E en tous leurs points forment une surface développable.

Dans la géométrie ordinaire, la conique α est le cercle de l'infini.

Le théorème du n° 3 transformé par homographie peut, d'après cela, s'énoncer ainsi :

Soit α *la conique prise pour conique absolue : les plans tangents menés à une surface du second ordre* E, *le long d'une ligne de courbure (par rapport à* α*), touchent une conique* β, *située dans le plan de la conique* α, *et passant par les quatre points communs à* E *et à* α.

En d'autres termes :

Les lignes de courbure d'une quadrique, par rapport à deux coniques coupant cette surface aux mêmes points, coïncident.

Par suite :

Les lignes de courbure d'une quadrique, par rapport à une conique quelconque passant par les points communs au cercle de l'infini et à la quadrique, coïncident avec les lignes de courbure ordinaires de cette surface.

Ce théorème peut s'énoncer ainsi, si l'on remarque que les lignes de courbure de E par rapport à une conique α sont sur les quadriques inscrites dans la développable circonscrite à E et à α :

Soit la développable circonscrite à une surface du second ordre le long d'une ligne de courbure : toute surface du second ordre inscrite dans cette développable coupe la première suivant une nouvelle ligne de courbure.

En s'appuyant sur ces résultats et en transformant par homographie certains théorèmes des paragraphes précédents, on arrive sans difficulté aux conséquences suivantes :

Soient deux cônes du second ordre H_1 *et* H_2, *homocycliques à une quadrique* E : *si deux cônes parallèles aux deux premiers* K_1 *et* K_2, *se coupent sur la quadrique, leurs sommets sont respectivement sur deux surfaces du second ordre* E_1 *et* E_2, *concentriques à la surface* E *et la coupant suivant deux lignes de courbure.*

Les plans tangents à E *le long de la ligne de courbure située sur* E_1 *sont parallèles aux plans tangents du cône* H_2 *et touchent la quadrique* E_2 ; *de même les plans tangents le long de la ligne de courbure située sur* E_2 *sont parallèles à ceux de* H_1 *et touchent la quadrique* E_1.

Soit H *un cône homocyclique à une quadrique* E : *les quadriques asymptotiques à ce cône, bitangentes à une courbe sphérique tracée sur* E *et simplement tangentes à cette surface, forment quatre séries, et les quadriques d'une même série touchent* E *suivant une ligne de courbure : cette ligne reste fixe si le cône* H *varie, la courbe sphérique considérée demeurant la même.*

Par suite :

Les quadriques homocycliques à une quadrique E, *bitangentes à une courbe sphérique tracée sur* E *et simplement tangentes à cette surface, la touchent suivant quatre lignes de courbure.*

Les quadriques homocycliques à une quadrique E, *bitangentes à une conique tracée sur* E *et simplement tangentes à cette surface, forment deux séries : les quadriques d'une même série touchent* E *le long d'une ligne de courbure, qui passe par* *les extrémités du diamètre conjugué du plan de la section considérée.*

Les quadriques homocycliques à une quadrique E, *tangentes aux deux génératrices qui passent par un point a, de* E *et tangentes à cette surface, forment deux séries : les quadriques d'une même série touchent* E *le long d'une des lignes de courbure qui passent par le point a.*

Dans ces énoncés, on suppose que les quadriques homocycliques considérées touchent E en un point non situé sur la courbe sphérique ou plane à laquelle elles sont bitangentes.

Soit H *un cône homocyclique à une quadrique* E : *les cônes parallèles à* H *qui sont doublement tangents à une courbe sphérique* (*ou plane*) *tracée sur* E *forment quatre* (*ou deux*) *séries : les sommets des cônes d'une même série décrivent une quadrique qui coupe la surface* E *suivant une ligne de courbure.*

Aux coniques communes à une surface du second ordre E *et à une série de plans parallèles à un plan* P, *circonscrivons des losanges, dont les côtés soient parallèles à deux directions données ; les sommets de ces losanges décrivent deux coniques.*

Une de ces coniques engendre une surface du second ordre, coupant E *suivant une ligne de courbure, si* P *varie en restant parallèle aux plans tangents d'un cône homocyclique à la quadrique* E.

En particulier, ces deux propositions s'appliquent aux sommets des carrés circonscrits aux sections faites dans une quadrique par les plans parallèles à un plan P.

Les lignes doubles de la développable circonscrite à une quadrique E *et à une quadrique quelconque homocyclique sont quatre coniques, dont chacune coupe* E *en quatre points situés sur une même ligne de courbure,* etc.

11. On déduit des considérations géométriques qui précèdent une solution simple de la question suivante :

Trouver les transformations homographiques qui conservent les lignes de courbure d'une quadrique E, c'est-à-dire qui font correspondre aux lignes de courbure de la quadrique E les lignes de courbure de la transformée E'.

Remarquons d'abord que les lignes de courbure de E sont encore des lignes de courbure quand on prend pour conique absolue une des trois coniques focales de E : cela résulte de ce que ces focales sont des lignes doubles de la développable circonscrite à E et au cercle de l'infini. Par suite, les lignes de courbure de E sont encore des lignes de courbure quand on prend pour conique absolue une conique quelconque passant par les quatre points communs à E et à une de ses focales. (Pour simplifier le langage, je regarderai le cercle de l'infini comme une focale de E, et les quatre points où il coupe E comme des ombilics). Il est clair qu'aucune conique autre que celles-là ne jouit de la même propriété.

Par conséquent, les lignes de courbure de E deviendront des lignes de courbure de E' si quatre ombilics de E situés dans un même plan ont pour transformés quatre ombilics de E' : si cette condition est remplie, à tous les ombilics de E correspondront des ombilics de E'.

Ainsi :

Pour qu'une transformation homographique conserve les lignes de courbure d'une quadrique, il faut et il suffit qu'elle conserve les ombilics.

Cela posé, il y a deux cas à distinguer :

1° Les ombilics à l'infini se correspondent dans les deux surfaces E et E'.

Transportons dans l'espace la surface E', de manière à faire coïncider ses plans principaux avec ceux de E, pris pour plans de coordonnées; on pourra évidemment faire en sorte que les ombilics de E' situés dans un de ces plans correspondent aux ombilics de E situés dans le même plan.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=t^2, \quad \frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}=t'^2$$

les équations de E et de E'.

La transformation cherchée sera, d'après ce qui précède, de la forme

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x, \\ y' &= \mu y, \\ z &= \nu z', \\ t' &= t. \end{aligned}$$

puisqu'elle laisse inaltérés les plans de coordonnées et le plan de l'infini.

Pour que les ombilics à l'infini se correspondent dans les surfaces E et E′, il faut qu'on ait identiquement

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \alpha(x^2 + y^2 + z^2) + \beta\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right),$$

α et β étant deux constantes; on en tire

$$\lambda^2 = \alpha + \frac{\beta}{a^2},$$

$$\mu^2 = \alpha + \frac{\beta}{b^2},$$

$$\nu^2 = \alpha + \frac{\beta}{c^2}.$$

D'un autre côté, on a

$$a'^2 = a^2\lambda^2, \quad b'^2 = b^2\mu^2, \quad c'^2 = c^2\nu^2$$

et, par suite,

$$a'^2 = \beta + \alpha a^2 = \alpha(a^2 + \gamma),$$
$$b'^2 = \beta + \alpha b^2 = \alpha(b^2 + \gamma),$$
$$c'^2 = \beta + \alpha c^2 = \alpha(c^2 + \gamma),$$

en posant $\alpha\gamma = \beta$, équations qui montrent que E′ est homothétique à une quadrique homofocale à E.

2° Les ombilics à l'infini ne se correspondent pas.

En ce cas, on peut faire coïncider les plans principaux des surfaces E et E′, de façon que les ombilics situés dans les plans $x = 0$, $y = 0$, se correspondent, et que les ombilics de E (ou E′), situés dans le plan $z = 0$, correspondent à ceux à l'infini de E′ (ou E).

La transformation est alors de la forme

$$x' = \lambda x, \quad y' = \mu y, \quad z' = \nu t, \quad t' = \varpi z.$$

Il faut qu'on ait identiquement

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \alpha\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b^2} - t^2\right) + \beta\left(\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} - t^2\right),$$

c'est-à-dire

$$\lambda^2 = \frac{\alpha}{a^2} + \frac{\beta}{a^2 - c^2},$$

$$\mu^2 = \frac{\alpha}{b^2} + \frac{\beta}{b^2 - c^2},$$

$$\nu^2 = -\alpha - \beta.$$

On a d'ailleurs

$$a^2\lambda^2 = -\frac{a'^2\nu^2}{c'^2},$$

$$b^2\mu^2 = -\frac{b'^2\nu^2}{c'^2},$$

$$c^2\varpi^2 = -\frac{\nu^2}{c'^2}.$$

En éliminant λ, μ, ν, ϖ, α et β entre les six relations précédentes, on trouve l'équation

$$o = \begin{vmatrix} a'^2 & b^2 & 1 \\ b'^2 & a^2 & 1 \\ c'^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix};$$

d'où l'on tire, α' et γ' étant des constantes,

$$a'^2 = \alpha'(b^2+\gamma'), \quad b'^2 = \alpha'(a^2+\gamma'), \quad c'^2 = \alpha'(c^2+\gamma').$$

On en conclut, comme plus haut, que E' est homothétique à uue quadrique homofocale à la surface

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = t^2,$$

qui est égale à la surface E.

Donc enfin :

Pour qu'on puisse établir entre deux quadriques une relation homographique transformant les lignes de courbure de l'une en des lignes de courbure de l'autre, il faut et il suffit que chacune d'elles soit semblable à une quadrique homofocale à l'autre.

Il y aura alors deux types de transformations homographiques répondant à la question.

12. On peut établir pour les coniques planes (ou sphériques) homofocales une théorie analogue à celle qui précède.

Nous nous bornerons à énoncer dans le cas des coniques planes les définitions et les résultats principaux auxquels on arrive ainsi.

On sait que les bissectrices d'un système de cordes communes à une conique et à un cercle sont parallèles aux axes de la conique : nous dirons qu'*un cercle fait partie d'un groupe* α par rapport à une conique, si une des cordes communes au cercle et à la conique fait avec le grand axe de cette dernière un angle égal à α ou à $(-\alpha)$.

Le lieu des centres des cercles de rayon nul appartenant à un même groupe par rapport à une conique λ est une conique homofocale.

Les cercles d'une même série, bitangents à une conique μ, inscrite dans une conique λ, appartiennent à un même groupe par rapport à cette dernière; et par suite : *deux foyers associés de μ sont sur une conique homofocale à λ.*

Par foyers associés, j'entends les foyers situés sur un même axe de la conique.

On peut construire une conique μ, bitangente à une conique donnée λ, et à deux cercles appartenant à un même groupe par rapport à λ; la ligne des centres de ces cercles est un axe de la conique μ.

Les coniques bitangentes à une conique λ et à un cercle donnés se partagent en trois classes : les coniques d'une même classe ont deux foyers associés sur une même conique homofocale à λ.

Ces foyers sont ceux situés sur l'axe passant par le centre du cercle.

Une des trois coniques homofocales à λ ainsi définies reste fixe si le cercle donné varie, sans cesser de faire partie d'un même groupe par rapport à λ.

Si l'on circonscrit un quadrilatère à une conique λ et à un cercle, les sommets opposés de ce quadrilatère sont deux à deux sur trois coniques homofocales à λ (CHASLES).

Une de ces coniques reste fixe si le cercle considéré varie sans cesser de faire partie d'un même groupe par rapport à λ.

Donc :

Les quadrilatères circonscrits à une conique λ et à chacun des cercles appartenant à un même groupe par rapport à cette conique ont deux sommets opposés sur une même conique, homofocale à λ.

On peut donner à ce théorème diverses formes et retrouver des propositions connues, en considérant par exemple les cercles tangents à λ en un même point, etc.