BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE D'OCAGNE

Sur les courbes polaires réciproques homologiques

Bulletin de la S. M. F., tome 13 (1885), p. 204-206

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1885__13__204_1>

Sur les courbes polaires réciproques homologiques;

par M. Maurice d'Ocagne.

(Séance du 17 juin 1885.)

Soient C et C′ deux courbes polaires réciproques par rapport à une conique K. Prenons sur C un point P et la tangente t en ce point; soient t' et P′ la tangente et le point correspondants sur C′. Si toutes les droites, telles que PP′, passent par un même point A, tous les points, tels que t, t', sont situés sur une même droite a, polaire de A par rapport à K; par suite, les courbes C et C′ sont *homologiques*, le point A étant le *centre* et la droite a l'*axe d'homologie*.

Nous nous proposons de rechercher toutes les courbes qui sont homologiques de leur polaire réciproque par rapport à une conique K donnée, les points correspondants étant les mêmes dans les deux cas, ou, en d'autres termes, les courbes telles que les droites qui joignent deux points correspondants, l'un sur la courbe, l'autre sur la polaire réciproque, passent par un même point.

Soit

$$f(X, Y, Z) = 0$$

l'équation homogène de la conique directrice K.

La polaire t' du point $P(x, y, z)$ de la courbe C a pour équation

$$xf'_X + yf'_Y + zf'_Z = 0.$$

Le point P' où cette droite touche son enveloppe C' est donné par son intersection avec la droite

$$dx f'_X + dy f'_Y + dz f'_Z = 0.$$

L'équation de la droite PP' sera donc

$$\frac{dx f'_X + dy f'_Y + dz f'_Z}{x f'_X + y f'_Y + z f'_Z} = \frac{dx f'_x + dy f'_y + dz f'_z}{x f'_x + y f'_y + z f'_z}$$

ou, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$\frac{dx f'_X + dy f'_Y + dz f'_Z}{x f'_X + y f'_Y + z f'_Z} = \frac{dx f'_x + dy f'_y + dz f'_z}{2 f(x, y, z)}.$$

Pour que cette droite passe par un point fixe (x_1, y_1, z_1), il faut que l'on ait, quel que soit le point (x, y, z) de la courbe C,

$$\frac{dx f'_{x_1} + dy f'_{y_1} + dz f'_{z_1}}{x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1}} = \frac{dx f'_x + dy f'_y + dz f'_z}{2 f(x, y, z)}.$$

Posons

$$f(x, y, z) = S, \quad x f_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1} = M;$$

l'équation précédente devient

$$\frac{dM}{M} = \frac{dS}{2S},$$

d'où, en intégrant,

$$S - \lambda M^2 = 0,$$

λ étant une constante arbitraire. On trouve donc l'équation des coniques bitangentes à la conique directrice K, la corde des contacts étant la polaire du point (x_1, y_1, z_1) par rapport à K.

Ainsi, *les seules courbes qui soient homologiques de leurs polaires réciproques, les points correspondants étant les mêmes dans les deux cas, sont les coniques bitangentes à la conique directrice*. L'axe d'homologie se confond avec la corde des contacts, le centre d'homologie avec le pôle de cette corde.

En particulier, on sait que le lieu du sommet d'un angle constant (courbe isoptique) dont les côtés sont tangents à une parabole est une hyperbole bitangente à cette parabole, la corde des contacts étant la directrice de cette parabole. Donc, *si* H *est une hyperbole isoptique de la parabole* P, H′ *la polaire réciproque de* H *par rapport à* P, *les droites qui joignent les points de* H *aux points correspondants de* H′ *passent toutes par le foyer de* P. Nous avions, par une voie indirecte, obtenu géométriquement ce théorème dans une de nos Notes sur la symédiane (¹).

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3ᵉ série, t. II, p. 462, § 26.