BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Sur l'intégration de quelques équations linéaires au moyen de fonctions doublement périodiques

Bulletin de la S. M. F., tome 12 (1884), p. 96-114

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1884__12__96_1>

Sur l'intégration de quelques équations linéaires au moyen de fonctions doublement périodiques; par E. Goursat.

(Séance du 20 juin 1884.)

1. Depuis les mémorables travaux de M. Hermite sur l'équation de Lamé, les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques ont été étudiées par un grand nombre de géomètres. On connaît le beau théorème de M. Picard, d'après lequel, si l'intégrale générale est uniforme, elle s'exprime au moyen des fonctions Θ. J'examine dans cette Note quelques équations qui offrent une application du théorème de M. Picard; ce sont des équations à coefficients rationnels, telles que la variable et l'intégrale générale peuvent s'exprimer par des fonctions uniformes doublement périodiques de première ou de deuxième espèce d'un même paramètre. Je me permettrai de signaler entre autres une équation du troisième ordre, qui contient huit nombres entiers quelconques et un paramètre tout à fait arbitraire.

Soit

$$F(y) = 0 \tag{1}$$

une équation linéaire d'ordre m à coefficients rationnels et à intégrales régulières, admettant comme points de ramification, pour l'intégrale générale, les points $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ et le point $x = \frac{1}{x'} = \infty$, que nous supposerons toujours un véritable point critique. Admettons que les racines des diverses équations déterminantes fondamentales relatives aux points critiques $a_1, a_2, \ldots, a_\rho, \infty$ soient commensurables, et en outre que l'intégrale générale ne contienne aucun logarithme dans le domaine de chacun de ces points. Supposons les racines d'une même équation fondamentale réduites à leur plus petit dénominateur commun, et soit m_i ce dénominateur commun pour le point critique a_i et n le dénominateur commun relatif au point $x = \infty$. Si les nombres $m_1, m_2, \ldots, m_\rho, n$ vérifient la relation

$$\sum_{i=1}^{i=\rho} \frac{1}{m_i} + \frac{1}{n} = \rho - 1,$$

l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dz} = g \prod_{i=1}^{i=\rho} (x - a_i)^{1 - \frac{1}{m_i}} \tag{2}$$

aura son intégrale générale uniforme, et l'on sait, d'après les mémorables travaux de MM. Briot et Bouquet, que cette intégrale sera ou une fonction rationnelle, ou une fonction simplement périodique, ou une fonction doublement périodique de z. Laissant de côté les deux premiers cas, supposons que cette intégrale soit doublement périodique et soit $f(z)$ cette fonction. Si dans l'équation (1) on fait le changement de variable $x = f(z)$, l'équation (1) se transforme en une équation à coefficients doublement périodiques, et il est aisé de vérifier que l'intégrale générale est aussi une fonction uniforme de z. En effet, soit z_0 une valeur de z telle que la valeur correspondante x_0 de x soit différente de $a_1, a_2, \ldots, a_\rho, \infty$; l'intégrale de l'équation (1) est une fonction uniforme de x dans le voisinage de x_0, et par suite une fonction uniforme de z dans le voisinage de z_0. Supposons en second lieu que, pour $z = z_1$, on ait $x = a_i$; posons $x = a_i + x' m_i$; y sera, par hypothèse, une fonction uniforme de x' dans le voisinage du point $x' = 0$. Mais, si l'on fait cette substitution dans l'équation (2), elle devient

$$\frac{dx'}{dz} = \varphi(x'),$$

$\varphi(x')$ étant holomorphe pour $x' = 0$; donc x', et par suite y, est une fonction uniforme de z dans le domaine du point z_1. On établirait de même que y est une fonction uniforme pour toute valeur finie de z pour laquelle x est infini; c'est donc une fonction uniforme de z dans toute l'étendue du plan. L'équation obtenue en posant $x = f(z)$ dans l'équation (1) rentre donc dans la classe des équations auxquelles s'applique le théorème de M. Picard.

2. On sait que toutes les équations de la forme (2), dont l'intégrale est uniforme et doublement périodique, se ramènent, par une substitution linéaire, aux quatre types suivants :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = gx(1-x)(1-K^2x), \tag{3}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^4 = gx^3(x-1)^2, \tag{4}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^6 = gx^2(x-1)^3, \tag{5}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 = gx^2(x-1)^2 \tag{6}$$

(*voir* Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions doublement périodiques*, p. 390 et suivantes); à chacune de ces équations binômes correspondent un certain nombre d'équations linéaires, qu'il est bien facile d'énumérer.

Prenons d'abord le type (3); l'équation linéaire correspondante admettra les quatre points singuliers 0, 1, $\frac{1}{K^2}$, ∞, et les racines des diverses équations fondamentales devront être commensurables et admettre 2 pour dénominateur commun. Comme nous excluons le cas où la différence de deux racines d'une même équation serait un nombre entier, il faudra que cette équation soit du second ordre, et les exposants de discontinuité seront respectivement :

Pour $x = 0$ .... $\lambda + \frac{1}{2}$. λ',

Pour $x = 1$ .... $\mu + \frac{1}{2}$, μ',

Pour $x = \frac{1}{K^2}$ .... $\nu + \frac{1}{2}$, ν',

Pour $x = \frac{1}{x'} = \infty$ .... $n_1 + \frac{1}{2}$, n,

λ, λ', μ, μ', ν, ν', n, n_1 étant des nombres entiers positifs ou négatifs dont la somme est nulle. On peut toujours, par une transformation facile, supposer $\lambda' = \mu' = \nu' = 0$ et λ, μ, ν positifs. L'équation correspondante sera alors

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} & x(1-x)(1-K^2x)\frac{d^2y}{dx^2} \\ & + [K^2(\nu - \tfrac{1}{2})x(1-x) + (\mu - \tfrac{1}{2})x(1-K^2x) + (\tfrac{1}{2} - \lambda)(1-x)(1-K^2x)]\frac{dy}{dx} \\ & = \left[\frac{K^2 n(2n + 2\lambda + 2\mu + 2\nu - 1)}{2} + \frac{h}{4}\right] y; \end{aligned}\right.$$

si l'on y pose $x = \operatorname{sn} z$, elle devient

$$(7\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{2K^2\nu \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z} + 2\mu\frac{\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z}{\operatorname{cn} z} - 2\lambda\frac{\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{\operatorname{sn} z}\right)\frac{dy}{dz} \\ & \qquad = [2n(2u + 2\lambda + + 2\mu + 2\nu - 1)K^2 \operatorname{sn}^2 z + h]y. \end{aligned}\right.$$

Cette équation est identique à l'équation signalée par M. Darboux (*Comptes rendus,* juin 1882), et étudiée depuis par M. de Sparre (*Acta mathematica,* t. III). On le voit facilement, en faisant une transformation de la forme

$$y = Y \operatorname{sn}^\alpha z \operatorname{cn}^\beta z \operatorname{dn}^\gamma . z.$$

si l'on fait $\lambda = \mu = \nu = 0$, on retrouve l'équation de Lamé.

Les équations linéaires correspondant aux types (4), (5), (6) des équations binômes n'auront que les trois points critiques 0, 1, ∞. Parmi les équations du second ordre, on aura quelques cas particuliers de l'équation d'Euler,

$$(8)\qquad x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0;$$

les quantités α, β, γ auront l'un des systèmes de valeurs ci-dessous :

$$\alpha = 0, \quad \beta = \tfrac{1}{4}, \quad \gamma = \tfrac{3}{4}.$$
$$\alpha = \tfrac{1}{4}, \quad \beta = \tfrac{1}{2}, \quad \gamma = \tfrac{1}{4},$$
$$\alpha = 0, \quad \beta = \tfrac{1}{3}, \quad \gamma = \tfrac{2}{3},$$
$$\alpha = \tfrac{1}{3}, \quad \beta = \tfrac{2}{3}, \quad \gamma = \tfrac{2}{3},$$
$$\alpha = \frac{n}{6}, \quad \beta = \frac{1-n}{6}, \quad \gamma = \tfrac{2}{3},$$
$$\alpha = \frac{n}{6}, \quad \beta = \frac{5-n}{6}, \quad \gamma = \tfrac{1}{3}.$$

A chacune de ces équations il faut joindre celles que l'on en déduit par les transformations connues qu'admet l'équation d'Euler. Il est à remarquer que, dans chacun de ces cas, l'intégration de l'équation (8) se ramène à des quadratures, et l'intégrale générale s'exprime bien en effet au moyen d'intégrales elliptiques.

Parmi les équations linéaires du troisième ordre, nous rencontrons d'abord un certain nombre d'équations hypergéométriques (voir *Annales de l'Ecole Normale*, t. XII, p. 278). Ce sont les équations de la forme

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} & x^2(x-1)\frac{d^3y}{dx^3} + [(3+a_1+a_2+a_3)x-(1+b_1+b_2)]x\frac{d^2y}{dx^2} \\ & + [1+a_1+a_2+a_3+a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)x - b_1b_2]\frac{dy}{dx} + a_1a_2a_3y = 0, \end{aligned}\right.$$

où a_1, a_2, a_3 ont l'un des systèmes de valeurs ci-dessous :

$b_1 = \frac{1}{3}$, $b_2 = \frac{2}{3}$, ..., $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{6}$,
......, ..., ..., $a_1 = \frac{5}{6}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{6}$,
......, ..., ..., $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$,
......, ..., ...; $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{5}{6}$, $a_3 = \frac{2}{3}$;

$b_1 = \frac{1}{4}$, $b_2 = \frac{3}{4}$, $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{3}{4}$,
$b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{3}{4}$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{2}$,
$b_1 = \frac{1}{4}$, $b_2 = \frac{1}{2}$; $a_1 = 0$; $a_2 = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{3}{4}$.

Enfin on rencontre également une équation du troisième ordre ayant la forme suivante :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} & x^3(x-1)^3\frac{d^3y}{dx^3} + [Ax + B(x-1)]\,x^2(x-1)^2\frac{d^2y}{dx^2} \\ & \qquad + [Cx(x-1) + Dx + E(1-x)]x(x-1)\frac{dy}{dx} \\ & \qquad - [Fx^2(x-1) + hx(x-1) + Hx + K(x-1)]y = 0; \end{aligned}\right.$$

les coefficients A, B, C, D, E, F, H, K sont choisis de façon que les racines des équations déterminantes fondamentales soient

$$\begin{array}{llll}\text{Pour } x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & m, & m' + \frac{1}{3}, & m'' + \frac{2}{3}, \\ \text{Pour } x = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots & n, & n' + \frac{1}{3}, & n'' + \frac{2}{3}, \\ \text{Pour } x = \frac{1}{x'} = \infty \ldots\ldots & p, & p' + \frac{1}{3}, & p'' + \frac{2}{3},\end{array}$$

$m, m', m'', n, n', n'', p, p', p''$ désignant des nombres entiers quelconques, dont la somme est nulle. L'équation (10) contient en outre un paramètre h tout à fait arbitraire, ce qui la rapproche de l'équation (7). Si l'on y fait $x = f(z)$, $f(z)$, étant une intégrale de l'équation (6), y sera aussi une fonction uniforme de z, et par suite, quel que soit h, l'intégrale générale s'exprimera au moyen des fonctions Θ.

3. L'analogie entre l'équation (10) et l'équation de Lamé peut encore être poussée plus loin; c'est ce qui résulte de la propriété suivante, que nous allons maintenant démontrer : *Le produit de trois intégrales convenablement choisies, et en général distinctes, est une fonction uniforme dans toute l'étendue du plan, et par suite un polynôme ou une fraction rationnelle.*

Dans le domaine de chacun des points $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$, l'équation (10) admet trois intégrales particulières, qui sont respectivement multipliées par les facteurs 1, α, α^2 (α, α^2 désignant les racines cubiques imaginaires de l'unité), lorsque la variable décrit un lacet autour de ce point. Soit y_1, y_2, y_3 le système fondamental du point $x = 0$ et z_1, z_2, z_3 le système fondamental du point $x = 1$; de telle sorte que l'on ait, dans le domaine du point $x = 0$,

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = x^{\frac{1}{3}} \varphi_2(x), \quad y_3 = x^{\frac{2}{3}} \varphi_3(x),$$

φ_1, φ_2, φ_3 étant uniformes dans ce domaine, et de même, dans le domaine du point $x = 1$,

$$z_1 = \psi_1(x), \quad z_2 = (x-1)^{\frac{1}{3}} \psi_2(x), \quad z_3 = (x-1)^{\frac{2}{3}} \psi_3(x),$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 étant uniformes pour $x = 1$. Considérons pour un moment les lignes indéfinies $-\infty$ ——— 0, 1 ——— $+\infty$ comme des coupures; entre les deux systèmes fondamentaux d'intégrales, il existe des relations linéaires telles que

$$(11)\qquad \begin{cases} y_1 = az_1 + bz_2 + cz_3, \\ y_2 = a'z_1 + b'z_2 + c'z_3, \\ y_3 = a''z_1 + b''z_2 + c''z_3, \end{cases}$$

le déterminant des coefficients

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

étant différent de zéro. Ces coefficients doivent être tels, qu'après avoir fait décrire à la variable un contour fermé enveloppant les points $x = 0$, $x = 1$, il y ait trois intégrales particulières qui se reproduisent multipliées respectivement par 1, α, α^2. Cette condition entraîne entre ces coefficients deux relations qu'il serait facile de former. D'autre part, les intégrales $y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ ne sont déterminées qu'à un facteur constant près. On conçoit donc qu'on puisse mettre les relations (11) sous une forme telle qu'elles ne contiennent plus que deux paramètres arbitraires. Il est commode pour cela de remplacer les systèmes fondamentaux par deux autres systèmes déterminés comme il suit.

Désignant par A, B, C trois constantes indéterminées, posons

$$Y = Ay_1 + By_2 + Cy_3;$$

proposons-nous de déterminer A, B, C de telle façon que l'intégrale Y se reproduise multipliée par un facteur constant ω quand la variable x décrit un lacet dans le sens direct autour du point $x = 1$ suivi d'un lacet dans le sens inverse autour du point $x = 0$; chemin que, pour abréger, je désignerai désormais par L. Si Y se change en ωY après que la variable a décrit un pareil chemin, il est clair que l'on devra arriver à la même intégrale, soit lorsqu'on fait décrire à la variable un lacet dans le sens direct autour du point $x = 1$, en prenant au départ l'intégrale Y, soit lorsqu'on fait décrire à la variable un lacet dans le sens direct autour du point $x = 0$, en prenant au départ l'intégrale ωY. Dans le premier cas, on aboutit à l'intégrale

$$A(az_1 + b\alpha z_2 + c\alpha^2 z_3) + B(a'z_1 + b'\alpha z_2 + c'\alpha^2 z_3) + C(a''z_1 + b''\alpha z_2 + c''\alpha^2 z_3);$$

dans le second cas, on est conduit à l'intégrale

$$\omega(Ay_1+B\alpha y_2+C\alpha^2y_3)=\omega(Aa+Ba'\alpha+Ca''\alpha^2)z_1+\omega(Ab+B\alpha b'+C\alpha^2b'')z_2$$
$$+\omega(Ac+B\alpha c'+C\alpha^2c'')z_3.$$

Il faudra donc que l'on ait

$$(12)\quad \frac{Aa+Ba'+Ca''}{Aa+Ba'\alpha+Ca''\alpha^2}=\frac{\alpha(Ab+Bb'+Cb'')}{Ab+B\alpha b'+C\alpha^2b''}=\frac{\alpha^2(Ac+Bc'+Cb'')}{Ac+B\alpha c'+C\alpha^2c''}=\omega;$$

l'élimination de A, B, C conduit à l'équation

$$(13)\quad \varphi(\omega)=\begin{vmatrix} a-a\omega & a'(1-\alpha\omega) & a''(1-\alpha^2\omega) \\ b(\alpha-\omega) & b'(\alpha-\alpha\omega) & b''(\alpha-\alpha^2\omega) \\ c(\alpha^2-\omega) & c'(\alpha^2-\alpha\omega) & c''(\alpha^2-\alpha^2\omega)\end{vmatrix}=\Delta+\theta\omega+\theta'\omega^2-\Delta\omega^3=0.$$

On a ainsi pour déterminer ω une équation du troisième degré, dans laquelle le produit des racines est égal à l'unité; d'après la signification des racines de cette équation, on sait qu'elle serait la même, quel que soit le système fondamental dont on partirait pour l'obtenir. Soit ω_1 une racine de cette équation; il y correspond une intégrale particulière Y_1 jouissant de la propriété précédente,

$$Y_1=Ay_1+By_2+Cy_3=A_1z_1+B_1z_2+C_1z_3$$

ou

$$A_1=Aa+Ba'+Ca'',$$
$$B_1=Ab+Bb'+Cb'',$$
$$C_1=Ac+Bc'+Cc''.$$

Partons d'un point quelconque du plan avec l'intégrale Y_1 et faisons décrire à la variable deux lacets successifs dans le sens direct autour de l'origine; on obtient ainsi deux nouvelles intégrales

$$Y_2=Ay_1+B\alpha y_2+C\alpha^2y_3,$$
$$Y_3=Ay_1+B\alpha^2y_2+C\alpha y_3.$$

De même, en faisant décrire à la variable plusieurs lacets successifs dans le sens direct autour du point $x=1$, on obtient deux nouvelles intégrales

$$Z_2=A_1z_1+B_1\alpha z_2+C_1\alpha^2z_3,$$
$$Z_3=A_1z_1+B_1\alpha^2z_2+C_1\alpha z_3.$$

Les trois intégrales Y_1, Y_2, Y_3 forment un système fondamental pourvu que le produit ABC soit différent de zéro. De même, le système Y_1, Z_2, Z_3 est fondamental, si $A_1 B_1 C_1$ n'est pas nul. Supposons que ces deux produits soient nuls en même temps. Il peut arriver que deux des trois quantités A, B, C soient nulles en même temps, ou qu'une seule soit nulle.

Prenons d'abord le cas où deux des trois quantités A, B, C seraient nulles à la fois; soit, par exemple, $B = C = 0$. Les relations (12) deviennent

$$\frac{Aa}{Aa} = \frac{\alpha A b'}{Ab} = \frac{\alpha^2 A c}{Ac};$$

les trois coefficients a, b, c ne peuvent être nuls ensemble. Si a est différent de zéro, on aura $b = c = 0$ et, par suite, $y_1 = a z_1$; si b n'est pas nul, on aura $a = c = 0$ et $y_1 = b z_2$, ... On voit donc que, dans ce cas, y_1^3 est une fonction uniforme et par suite une fonction rationnelle, et l'équation (10) ne sera pas *irréductible*. Comme les points $x = 0$, $x = 1$ jouent un rôle identique, il en serait de même si deux des trois quantités A_1, B_1, C_1 étaient nulles.

Supposons en second lieu qu'une seule des quantités A, B, C soit nulle ainsi qu'une seule des quantités A_1, B_1, C_1. Soit, par exemple, $C = C_1 = 0$, $AB \neq 0$, $A_1 B_1 \neq 0$. On aura

$$\begin{aligned} Y_1 &= A y_1 + B y_2 = A_1 z_1 + B_1 z_2, \\ Y_2 &= A y_1 + B \alpha y_2, \\ Z_2 &= A_1 z_1 + B_1 \alpha z_2; \end{aligned}$$

mais, d'après la façon dont nous avons choisi l'intégrale Y_1, on a $Z_2 = \omega_1 Y_2 \omega_1 = Y_2$, c'est-à-dire

$$\omega_1(A y_1 + B \alpha y_2) = + A_1 z_1 B_1 \alpha z_2,$$

et cette relation, jointe à la précédente, nous montre que y_1 et y_2 constituent un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire du second ordre à coefficients uniformes L'équation (10) ne sera pas encore *irréductible*.

Laissant de côté ces cas particuliers, qui seront examinés plus loin, nous voyons que, si l'équation (10) n'admet pas d'intégrales communes avec une équation linéaire d'ordre moindre à coefficients rationnels, les deux produits ABC, $A_1 B_1 C_1$ ne pourront être nuls en même temps. Comme rien ne distingue les deux points $x = 0$, $x = 1$, je supposerai que le produit ABC est différent de zéro; les intégrales Y_1, Y_2, Y_3 forment alors un système fondamental, et ces intégrales se permutent circulairement lorsque la variable tourne autour du point $x = 0$. Lorsque la variable décrit un lacet dans le sens direct autour du point $x = 1$, nous savons déjà que Y_1 se change en $\omega_1 Y_2$; quant aux intégrales Y_2 et Y_3, elles se changent respectivement en $aY_1 + bY_2 + cY_3$, $a'Y_1 + b'Y_2 + c'Y_3$, les coefficients a, b, c, a', b', c' n'étant plus les mêmes que tout à l'heure. Le groupe de l'équation (10) dérive donc de deux substitutions fondamentales de la forme suivante et des substitutions inverses :

$$S(Y_1, Y_2, Y_3 : Y_2, Y_3, Y_1),$$
$$S'(Y_1, Y_2, Y_3 : \omega_1 Y_2, aY_1 + bY_2 + cY_3, a'Y_1 + b'Y_2 + c'Y_3).$$

Soient λ, μ, ν trois constantes indéterminées; par la substitution S′, l'intégrale $\lambda Y_1 + \mu Y_2 + \nu Y_3$ se change en

$$(\mu a + \nu a')Y_1 + (\lambda\omega_1 + \mu b + \nu b')Y_2 + (\mu c + \nu c')Y_3.$$

Pour avoir les intégrales qui sont multipliées par un facteur constant σ, par cette substitution, on est conduit aux équations

$$\begin{aligned} -\lambda\sigma + \mu a + \nu a' &= 0, \\ \lambda\omega_1 + \mu(b - \sigma) + \nu b' &= 0, \\ \mu c + \nu(c' - \sigma) &= 0, \end{aligned}$$

et l'élimination de λ, μ, ν conduit à l'équation

$$(14) \quad \sigma^3 - (b + c')\sigma^2 + (bc' - b'c - a\omega_1)\sigma - \omega_1(a'c - ac') = 0.$$

De même, les substitutions S′ et S, appliquées successivement à l'intégrale $\lambda Y_1 + \mu Y_2 + \nu Y_3$, la changent en

$$(\mu c + \nu c')Y_1 + (\mu a + \nu a')Y_2 + (\lambda\omega_1 + \mu b + \nu b')Y_3,$$

et si l'on cherche les intégrales qui sont multipliées par σ après ces deux substitutions, on est conduit aux équations

$$\begin{aligned} -\lambda\sigma + \mu c + \nu c' &= 0, \\ \mu(a - \sigma) + \nu a' &= 0, \\ \lambda\omega_1 + \mu b + \nu(b' - \sigma) &= 0; \end{aligned}$$

l'élimination de λ, μ, ν conduit de même à l'équation

$$(15)\qquad \sigma^3-(a+b')\sigma^2+(ab'-ba'-c'\omega_1)\sigma-\omega_1(a'c-ac')=0.$$

D'après les propriétés de l'équation (10), les deux équations (14) et (15) doivent se réduire à $\sigma^3-1=0$; ce qui exige que l'on ait

$$(16)\qquad \begin{cases} b+c'=0, & bc'-cb'=a\omega_1, \\ a+b'=0, & ab'-ba'=c'\omega_1, \quad \omega_1(a'c-ac')=1. \end{cases}$$

Si les deux quantités b et b' sont différentes de zéro, la substitution S′, appliquée à l'intégrale $b'Y_2-bY_3$, la change en

$$(ab'-ba')Y_1-(bc'-b'c)Y_3,$$

ou, d'après les formules (16), en

$$\omega_1(cY_1-aY_3)=\omega_1(b'Y_3-bY_1);$$

la substitution S^{-1}, appliquée ensuite la change en

$$\omega_1(b'Y_2-bY_3).$$

Il existera donc deux intégrales distinctes Y_1 et $b'Y_2-bY_3$, qui sont multipliées par le facteur constant ω_1 lorsque la variable décrit le chemin L; ce qui exige que ω_1 soit racine double de l'équation $\varphi(\omega)=0$. Écartons d'abord le cas particulier où $\varphi(\omega)$ se réduirait à $(\omega-1)^3$: nous pourrons supposer que l'on a pris pour ω_1 une racine simple de cette équation, et il faudra que l'on ait $b=b'=0$. Les équations (16) donnent alors $a=0$, $c'=0$, $a'c\omega_1=1$. Pour l'uniformité des notations, posons $c=\omega_2$, $a'=\omega_3$; les substitutions S et S′ auront les formes suivantes :

$$(17)\qquad \begin{cases} S(Y_1, Y_2, Y_3 : Y_2, Y_3, Y_1), \\ S'(Y_1, Y_2, Y_3 : \omega_1 Y_2, \omega_2 Y_3, \omega_3 Y_1), \end{cases}$$

où ω_1, ω_2, ω_3 sont précisément les racines de l'équation $\varphi(\omega)=0$, racines qui vérifient la relation $\omega_1\omega_2\omega_3=1$.

Je dis qu'il en est de même dans le cas où $\varphi(\omega)$ admet la racine triple $\omega=1$. En effet, supposons qu'il en soit ainsi et reprenons le raisonnement précédent. Il n'y a rien à changer si les deux quantités b et b' sont nulles; je remarque que, d'après les relations (16), si l'une d'elles est nulle, il en est de même de la seconde.

Supposons-les toutes différentes de zéro, et posons

$$\begin{aligned} Z_1 &= \quad b'^2 Y_1 - bb' Y_2 + b^2 Y_3, \\ Z_2 &= \quad b^2 Y_1 + b'^2 Y_2 - bb' Y_3, \\ Z_3 &= - bb' Y_1 + b^2 Y_2 + b'^2 Y_3; \end{aligned}$$

Z_1, Z_2, Z_3 forment un système fondamental, pourvu que $b^3 + b'^3$ soit différent de zéro. Supposons cette condition remplie; nous venons de voir que la substitution S' change Z_1 en Z_2 et Z_2 en Z_3, et le groupe de l'équation dérivera des deux substitutions

$$\begin{aligned} &S(Z_1, Z_2, Z_3 : Z_2, Z_3, Z_1), \\ &S'(Z_1, Z_2, Z_3 : Z_2, Z_3, aZ_1 + bZ_2 + cZ_3). \end{aligned}$$

On obtiendra, comme plus haut, les coefficients a, b, c en écrivant que la substitution S' reproduit trois intégrales particulières multipliées par les facteurs 1, α, α^2, et l'on trouve qu'il faut prendre $a = 1$, $b = c = 0$. Ces substitutions S et S' sont par conséquent de la forme (17).

Si l'on avait $b^3 + b'^3 = 0$, les trois intégrales Z_1, Z_2, Z_3 seraient identiques, et Z_1^3 serait une fonction uniforme.

En résumé, *toutes les fois que l'équation* (10) *est irréductible, le groupe de l'équation dérive de deux substitutions de la forme* (17), Y_1, Y_2, Y_3 *désignant trois intégrales convenablement choisies formant un système fondamental.*

Sous cette forme, on reconnaît immédiatement que le produit $Y_1 Y_2 Y_3$ est uniforme, d'après la relation $\omega_1 \omega_2 \omega_3 = 1$. On voit aussi que les dérivées logarithmiques

$$\frac{1}{Y_1}\frac{dY_1}{dx}, \quad \frac{1}{Y_2}\frac{dY_2}{dx}, \quad \frac{1}{Y_3}\frac{dY_3}{dx}$$

ne peuvent que revenir à leurs valeurs initiales ou s'échanger entre elles lorsque la variable décrit un contour fermé quelconque; ces dérivées sont donc racines d'une équation du troisième degré, dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de la variable. Soit $\frac{1}{Y}\frac{dY}{dx} = U$; la relation $f(U, x) = 0$ sera du genre *un*, car la fonction U est ramifiée de la même manière que la fonction algébrique u définie par l'équation

$$u^3 = x(x-1).$$

L'intégrale générale de l'équation (10) s'exprimera donc au moyen d'intégrales elliptiques de première et de troisième espèce, ce qui est bien conforme au théorème de M. Picard.

Pour effectuer l'intégration, on pourra employer une méthode analogue à l'une des méthodes employées par M. Hermite pour l'équation de Lamé (*Annali di Matematica,* t. IX, 2^e^ série). On peut toujours, par une transformation facile, supposer que m et n sont nuls, et que m', n', m'', n'' sont nuls ou positifs; cette transformation effectuée, le produit $Y_1 Y_2 Y_3$, restant fini dans toute l'étendue du plan, ne pourra être qu'un polynôme, et il est aisé d'avoir *a priori* le degré de ce polynôme d'après la forme des intégrales dans le voisinage du point $x = \infty$. Ce produit satisfait à une équation linéaire du dixième ordre que l'on sait former, et l'on pourra toujours l'obtenir sans autre difficulté que la longueur des calculs. Une fois ce produit connu, M. Halphen a montré comment on pouvait achever l'intégration (*Comptes rendus,* t. XCVII, p. 1408 et 1541; t. XCVIII, p. 134); l'application de sa méthode conduit en effet à des quadratures.

4. Supposons maintenant que l'équation (10) admette une intégrale commune avec une équation linéaire à coefficients rationnels d'ordre inférieur au troisième. Cette équation pourra être du premier ou du second ordre, mais nous allons voir que le second cas se ramène au premier.

En effet, si l'équation (10) admet toutes les intégrales d'une équation du second ordre à coefficients rationnels $\Phi(y) = 0$, dans le domaine de chacun des points 0, 1, ∞, l'équation $\Phi(y) = 0$ devra admettre deux intégrales qui se reproduisent multipliées par deux des facteurs 1, α, α^2, lorsque la variable décrit un lacet autour de ce point, et, dans le domaine de tout autre point, l'intégrale sera uniforme. On peut toujours, en multipliant ces intégrales par un facteur de la forme $x^p(x-1)^q$, où p et q ont l'une des valeurs 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, supposer que les multiplicateurs relatifs aux points 0 et 1 sont 1 et α. Soient y_1 et y_2 les intégrales qui se comportent d'une manière simple dans le domaine du point $x = 0$

et z_1, z_2 celles qui se comportent d'une manière simple dans le domaine du point $x = 1$. Entre ces intégrales il existe deux relations linéaires, telles que

$$(18)\qquad \begin{cases} y_1 = a z_1 + b z_2, \\ y_2 = c z_1 + d z_2; \end{cases}$$

le déterminant $ad - bc$ étant différent de zéro, comme z_1 n'est déterminé qu'à un facteur constant près, on peut supposer $ad - bc = 1$. Les équations (10) peuvent aussi s'écrire

$$\begin{cases} z_1 = d y_1 - b y_2, \\ z_2 = a y_1 - c y_2. \end{cases}$$

Faisons décrire à la variable deux lacets successifs dans le sens direct autour des points $x = 0$, $x = 1$; y_1 se change en $a z_1 + b\alpha z_2$ ou en

$$a(dy_1 - by_2) + b\alpha(ay_2 - cy_1) = (ad - \alpha bc)y_1 + (\alpha - 1)ab y_2.$$

De même, y_2 se change en $\alpha(c z_1 + d z_2)$, puis en $\alpha(c z_1 + d\alpha z_2)$ ou en

$$\alpha c(dy_1 - by_2) + d\alpha^2(ay_2 - cy_1) = cd(\alpha - \alpha^2)y_1 + (\alpha^2 ad - \alpha bc)y_2.$$

Il en résulte que $\lambda y_1 + \mu y_2$ se change en

$$[\lambda(ad - \alpha bc) + \mu cd(\alpha - \alpha^2)]y_1 + [\lambda(\alpha - 1)ab + \mu(\alpha^2 ad - \alpha bc)]y_2;$$

pour que cette intégrale se reproduise à un facteur constant près σ, il faudra que l'on ait

$$\lambda(ad - \alpha bc - \sigma) + \mu cd(\alpha - \alpha^2) = 0,$$
$$\lambda(\alpha - 1)ab + \mu(\alpha^2 ad - \alpha bc - \sigma) = 0$$

et par suite

$$\begin{vmatrix} ad - \alpha bc - \sigma & cd(\alpha - \alpha^2) \\ (\alpha - 1)ab & \alpha^2 ad - \alpha bc - \sigma \end{vmatrix} = \sigma^2 + \sigma\alpha(ad + 2bc) + \alpha^2 = 0.$$

Les racines de cette équation doivent être distinctes et avoir l'une des valeurs 1, α, α^2; ces racines seront par suite 1 et α^2, ce qui exige que l'on ait

$$1 + \alpha(ad + 2bc) + \alpha^2 = 0$$

ou

$$ad + 2bc = 1.$$

Cette relation, jointe à la condition $ad - bc = 1$, donne $3bc = 0$. Il en résulte que l'équation $\Phi(y) = 0$ admet elle-même une intégrale commune avec une équation du premier ordre à coefficients rationnels. Ainsi, *si l'équation* (10) *n'est pas irréductible, elle admet pour intégrale la racine cubique d'une fraction rationnelle.*

On peut encore se proposer dans ce cas de former le groupe de l'équation (10). En multipliant toutes les intégrales par un facteur de la forme $x^p(x-1)^q$, on peut supposer qu'elle admet une intégrale uniforme dans tout le plan. Les substitutions fondamentales du groupe auront la forme suivante :

$$\begin{gathered} S(y_1, y_2, y_3 : y_1, \alpha y_2, \alpha^2 y_3), \\ S'(y_1, y_2, y_3 : y_1, a y_1 + b y_2 + c y_3, a' y_1 + b' y_2 + c' y_3). \end{gathered}$$

Pour déterminer les coefficients a, b, c, a', b', c', on emploie la méthode dont je me suis déjà servi plusieurs fois ; on trouve ainsi les conditions

$$b + c' + 1 = 0, \quad bc' - b'c = 1, \quad b\alpha + c'\alpha^2 + 1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$b = \alpha, \quad c' = \alpha^2, \quad b'c = 0.$$

Cette dernière donne soit $b' = 0$, soit $c = 0$; comme rien ne distingue les deux intégrales y_2, y_3, nous prendrons $c = 0$. Par suite, le groupe de l'équation (10) dérive dans ce cas de deux substitutions de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} & S(y_1, y_2, y_3 : y_1, \alpha y_2, \alpha^2 y_3), \\ & S'(y_1, y_2, y_3 : y_1, a y_1 + \alpha y_2, a' y_1 + b' y_2 + \alpha^2 y_3), \end{aligned} \right. \tag{19}$$

a, a', b' étant trois coefficients indéterminés.

5. Il est facile de déduire de là la forme analytique de l'intégrale générale. Nous savons déjà que y_1 est une fonction rationnelle. Si $a = 0$, y_2 sera la racine cubique d'une fonction rationnelle ; si a n'est pas nul, le rapport $\frac{y_2}{y_1}$ admet en chaque point du

plan une infinité de valeurs comprises dans la formule

$$\alpha^m\left(\frac{y_2}{y_1}\right)+C;$$

sa dérivée $\dfrac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx}$ sera donc une fonction algébrique ramifiée comme la fonction $u=\sqrt[3]{x(x-1)}$, et par suite $\frac{y_2}{y_1}$ sera une intégrale elliptique.

Tout pareillement, on reconnaît que si les deux coefficients a' et b' sont nuls, y_3 est la racine cubique d'une fraction rationnelle. Si b' est nul, sans que a' le soit, le rapport $\frac{y_3}{y_1}$ est une intégrale elliptique; si a et b' sont nuls et a' différent de zéro, $\frac{y_3}{y_2}$ sera une intégrale elliptique. Si a et b' sont tous deux différents de zéro, en posant

$$U=\frac{y_3}{y_1}-\frac{b'}{2a\alpha}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2,$$

on reconnaît que la fonction U admet en chaque point une infinité de valeurs qui sont comprises dans la formule $\alpha^m U+C$; U est donc une intégrale elliptique.

6. Si l'on suppose nuls tous les nombres m et n, l'équation (10) prend la forme

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &x^2(x-1)^2\frac{d^3y}{dx^3}+(4x-2)x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}\\ &\quad+\left[\frac{2}{q}(1-10x+10x^2)+\left(pp'+pp''+p'p''+p+\frac{p'}{3}+\frac{p''}{3}\right)x(x-1)\right]\frac{dy}{dx}\\ &\qquad\qquad+\left[p(p'+\tfrac{1}{3})(p''+\tfrac{2}{3})x+h\right]y=0,\end{aligned}\right.$$

p, p', p'' désignant trois nombres entiers dont la somme est nulle. Considérons l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^3=6\sqrt{3}(1+K^2)^{\frac{3}{2}}x^2(x-1)^2,$$

qui admet l'intégrale

$$x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+K^2}\,\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z,$$

le module K^2 ayant la valeur particulière donnée par l'équation

$$[(HK^2)^2] - 3K^2 = 0.$$

Si dans l'équation (20) on remplace x par la fonction précédente, on trouve l'équation transformée

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^3y}{dz^3} + 3(1+K^2)\left(pp'+pp''+p'p''+p+\frac{2p'}{3}+\frac{p''}{3}\right)[(1+K^2)\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z - 1]\frac{dy}{dz} \\ &\quad + 6\sqrt{3}(1+K^2)^{\frac{3}{2}}\left[p(p'+\tfrac{1}{3})(p''+\tfrac{2}{3})\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+K^2}\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z\right)+h\right]y = 0. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas particulier où les trois nombres p, p', p'' sont nuls, cette équation se réduit à

$$\frac{d^3y}{dz^3} + 6\sqrt{3}(1+K^2)^{\frac{3}{2}} hy = 0;$$

il en résulte que l'intégrale générale de l'équation (20) sera

$$y = C_1 e^{\sqrt[3]{-h}\int\frac{dx}{x^{\frac{2}{8}}(x-1)^{\frac{2}{7}}}} + C_2 e^{\alpha\sqrt[3]{-h}\int\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{7}}}} + C_3 e^{\alpha^2\sqrt[3]{-h}\int\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}},$$

si h n'est pas nul, et, si $h = 0$,

$$y = C_1 + C_2\int\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}} + C_3\left(\int\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}\right)^2.$$

Il y a encore deux autres cas où l'on peut effectuer l'intégration : c'est d'abord celui où l'on a $p = 1$, $p' = 0$, $p'' = -1$; en tenant compte de la valeur particulière du module K^2, l'équation (21) peut s'écrire

$$\frac{d^3y}{dz^5} + (1 + K^2 - 3K^2 \operatorname{sn}^2 z)\frac{dy}{dz} + (h_1 - 3K^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z)y = 0.$$

Cette équation rentre dans une catéégorie d'équations du troisième ordre, dont M. Mittag-Leffler a fait connaître l'intégrale générale [*Ueber die Integration, etc.* (*Acta Societatis Fennicæ,* t. XII, p. 65. *Comptes rendus,* 22 mars et 5 avril 1880]. L'équation dont il s'agit ici admet les trois intégrales particulières

$$y = \frac{H(z+\omega)}{\Theta(z)} e^{-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}z}$$

ω étant donné par l'équation

$$h_1 + K^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega = 0.$$

Enfin, si l'on suppose $p = 0$, $p' = 1$, $p'' = -1$, l'équation (21) devient

$$\frac{d^3y}{dz^3} + [2(1+K^2) - 6K^2 \operatorname{sn} z^2] \frac{dy}{dz} + h_1 y = 0;$$

c'est un cas particulier d'une équation intégrée par M. Picard (*Comptes rendus*, t. XC, p. 128).

Dans le cas général, la méthode d'intégration indiquée plus haut pour l'équation (10) semble devoir conduire à des calculs compliqués. En premier lieu, cette méthode exige la formation d'une équation du dixième ordre, et la recherche d'un polynôme satisfaisant à cette équation. Connaissant ce polynôme, l'application de la méthode de M. Halphen paraît elle-même exiger d'assez longs calculs. Peut-être pourrait-on opérer plus simplement en cherchant la dérivée logarithmique; si dans l'équation (10) on pose $y = e^{\int u dx}$, on est conduit à une équation du second ordre en u, qui admet, d'après ce que nous avons vu, une intégrale algébrique. Soit

$$Pu^3 + Qu^2 + Ru + S = 0$$

l'équation qui donne cette intégrale algébrique; P, Q, R, S sont des fonctions entières de x, dont il est aisé d'avoir le degré, ou du moins une limite supérieure de ce degré. Soit $F(x)$ le polynôme, produit des trois intégrales Y_1, Y_2, Y_3; la fonction u ne peut avoir que des pôles du premier ordre, et ces pôles seront, outre les points 0, 1, ∞, les racines de $F(x) = 0$; comme on peut trouver *a priori* le degré de $F(x)$, P, Q, R, S ne contiendront qu'un nombre limité de coefficients indéterminés, et tout se réduira à un calcul d'identification.

L'équation (21) peut s'écrire, en tenant compte de la valeur particulière du module,

$$\frac{d^3y}{dz^3} + (3pp' + 3pp'' + 3p'p'' + 3p + 2p' + p'')[3K^2 \operatorname{sn}^2 z - (1+K^2)] \frac{dy}{dz}$$
$$+ [3p(3p'+2)(3p''+2)K^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z + h_1]y = 0.$$

Quelle que soit la valeur du module K^2, cette équation admet les points critiques $z = iK' + 2mK + 2m'iK'$, et les racines de l'équation déterminante sont $3p$, $3p'+1$, $3p''+2$; mais on sait que, pour que l'intégrale générale soit uniforme, deux autres conditions subsidiaires doivent être remplies. Lorsque K^2 a la valeur particulière définie par l'équation $[(HK^2)^2] - 3K^2 = 0$, nous venons de voir qu'elles sont toujours remplies; mais, dans les deux cas particuliers que nous avons examinés, elles le sont aussi, quel que soit K^2. Il y a donc lieu de se demander si l'équation précédente n'aurait pas son intégrale uniforme, quel que soit le module K^2, et les nombres entiers p, p', p'' vérifiant la relation $p + p' + p'' = 0$. Il ne semble pas qu'aucune méthode simple puisse être appliquée au cas général.