P. TANNERY

Note sur la théorie des ensembles

Bulletin de la S. M. F., tome 12 (1884), p. 90-96
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1884__12__90_1>

Note sur la théorie des ensembles; par M. Paul Tannery.

(Séance du 20 juin 1884.)

1. Le très important travail : *Une contribution à la théorie des ensembles,* publié par M. Georg Cantor dans le *Journal de Borchardt,* t. 84, 1877, et réédité dans les *Acta mathematica* de M. Mittag-Lefler, 2, 4 (p. 311-328), 1883, contient une lacune évidente que l'auteur n'a pas, au reste, cherché à dissimuler.

Après avoir établi que les ensembles linéaires se groupent en au moins deux classes distinctes, dont la première comprend ceux de même puissance que la série des nombres entiers positifs, et la seconde, ceux de même puissance que l'ensemble de toutes les valeurs réelles entre 0 et 1, M. Georg Cantor admet, *par induction,* qu'il n'y a pas d'autres classes, c'est-à-dire d'autres espèces de puissances pour les ensembles infinis.

Comme il a d'ailleurs établi que la puissance de la première classe est la plus petite (pour les ensembles infinis), il est clair que l'induction dont il s'agit se ramène à deux négations bien distinctes :

1° Il n'y a pas de puissance intermédiaire entre celle de la première classe et celle de la seconde;

2° Il n'y a pas de puissance supérieure à celle de la seconde classe.

Dans ses *Fondements d'une théorie générale des ensembles* (*Annales mathématiques de Leipzig*, t. XXI; *Acta mathematica,* p. 381-408), M. Georg Cantor, pour donner une solution complète et exacte de la question, est entré dans un ordre d'idées où tous les géomètres ne seront peut-être pas également disposés à le suivre; en tout cas, il a seulement annoncé comme prochaine la démonstration de la première négation, et, tout en maintenant la seconde en ce qui concerne les systèmes de points infinis, il s'est élevé à la conception de classes de nombres supérieurs.

Si on laisse de côté cette dernière conception et si l'on fait également abstraction de toutes celles qui s'y rapportent, il n'en est pas moins certain, après les beaux travaux de M. Georg Cantor, que, pour la seconde négation, il n'y a pas de difficulté réelle; pour la première, au contraire, le défaut d'une démonstration reste sensible.

Il ne faut pas d'ailleurs se tromper sur le caractère que peut avoir cette démonstration. Il s'agit, en somme, de constituer un symbolisme algébrique pour représenter les puissances des ensembles infinis, et c'est bien là ce qu'a essayé de faire M. Georg Cantor, dans le second des deux travaux que j'ai rappelés; il ne s'est arrêté que devant la démonstration rigoureuse de la proposition : que *la puissance de l'ensemble de tous les nombres réels de* 0 *à* 1 *n'est autre que celle de la seconde classe de nombres.*

Il m'a semblé que le but à poursuivre pouvait être atteint par une voie plus simple, ou du moins plus conforme aux idées généralement admises en ce qui concerne la gradation des ordres d'infinis successifs. On ne s'étonnera donc pas, en pareille matière, si le symbolisme que je proposerai diffère de celui de M. Georg Cantor, et l'on reconnaîtra facilement que la divergence, plus apparente que réelle au fond, tient au mode d'application qu'il fait de son principe de limitation.

En tout cas, la question doit être ramenée, comme je l'ai dit, à l'établissement d'un symbolisme représentant la puissance de la seconde classe par rapport à la première, c'est-à-dire à la puissance de l'ensemble des nombres entiers positifs. La vérité de la succession immédiate de ces deux classes d'ensembles sera donc expressément relative à la forme de ce symbolisme supposé bien établi; je veux dire que la possibilité doit rester ouverte en principe, sinon en fait, d'introduire ultérieurement un nouvel ordre d'idées pour concevoir des classes intermédiaires correspondant à de nouveaux symboles dérivés des premiers, de même que, de la notion d'espaces à n dimensions, n étant entier, on a pu passer à la notion d'espaces à $\frac{p}{q}$ dimensions, sans détruire aucunement par là la succession logique immédiate entre les espaces à n et à $n+1$ dimensions.

2. D'après la position du problème, il faut évidemment partir de la considération de la puissance de la première classe, celle des ensembles d'objets (points, nombres, etc.) isolés et en nombre infini, pour s'élever de là à la puissance qui se présentera comme étant immédiatement supérieure.

Pour employer le langage de M. Georg Cantor, lorsque chaque dimension d'un ensemble $n^{\text{ip'e}}$ *bien défini* est de la première puissance (n étant un nombre entier positif quelconque), l'ensemble est lui-même de la première puissance, c'est-à-dire qu'on peut le faire correspondre, élément par élément, au moyen d'une opération à sens unique, avec la série des nombres entiers positifs.

Comme l'expression d'ensemble à n dimensions ne se prête point facilement à la représentation, je la remplacerai par celle d'ensemble à n entrées.

Si, en effet, le nombre des entrées, pour les ensembles classés en tables, est nécessairement très restreint dans la pratique, on peut se le représenter facilement comme croissant au delà de toute limite, si, par exemple, chaque élément d'une première table à double entrée correspond d'une façon unique à une autre table à double entrée, et ainsi de suite.

Pour fixer les idées, j'admettrai que l'ordre dans lequel on prend chacune des entrées est bien défini, ou autrement que chacune d'elles sera complètement déterminée, et dans un sens unique, par son rang m, variant de 1 à n inclusivement.

Chaque entrée sera considérée de plus comme se faisant suivant une suite de nombres définie sans ambiguïté. Si ω_m est le nombre des éléments de cette suite pour la $n^{\text{ième}}$ entrée, ce nombre ω_m sera dit l'*extension* de ladite entrée.

Considérons d'abord un ensemble fini d'éléments classés dans une telle table à n entrées, dont les extensions ω_1, ω_2, ..., ω_n sont finies et connues; le nombre de ces éléments ou la puissance de leur ensemble sera le produit

$$\Omega = \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n,$$

et si l'on suppose d'ailleurs

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = \omega,$$

on aura

$$\Omega = \omega^n,$$

Si ω croît indéfiniment, de façon à représenter la puissance de la série des nombres entiers positifs, n étant d'ailleurs un nombre entier positif quelconque, mais déterminé, Ω reste de la première puissance, conformément à la proposition rappelée plus haut.

Il est clair que l'on ne peut maintenir la même conclusion si l'on fait croître en même temps n au delà de toutes limites, et nous apercevons dans ce procédé un moyen d'arriver à nous représenter un ensemble dont la puissance, supérieure à la première, pourra correspondre au symbole ω^ω.

Mais nous reconnaissons immédiatement aussi que nous pouvons également dépasser la première puissance, en faisant croître encore n au delà de toute limite, tandis que la valeur commune de l'extension des entrées reste égale à un nombre entier positif α d'ailleurs quelconque, mais déterminé et par conséquent fini.

Nous arrivons ainsi à un autre symbole α^ω, dont la puissance serait également supérieure à celle de ω, et il est clair d'ailleurs que, dans l'ordre d'idées où nous nous plaçons, il ne peut y avoir d'autre puissance intermédiaire entre celle de ω et celle de α^ω. Nous pourrons dire, par conséquent, que, ω étant de la première puissance, α^ω sera de la seconde; mais il nous faut démontrer que, en réalité, il y a là deux puissances différentes.

Il suffira, à cet égard, de faire voir que l'ensemble des nombres réels compris entre o et 1 est de la même puissance que α^ω, et nous aurons par là même atteint complètement le but que nous nous étions proposé primitivement.

Quant au symbole ω^ω, il nous suffira de faire voir qu'il ne conduit pas à la conception d'une puissance supérieure.

3. La représentation d'un ensemble à n entrées ne souffre évidemment aucune difficulté lorsque l'extension des entrées devient infinie; mais il est clair que nous devons, avant tout, la préciser lorsque le nombre des entrées devient lui-même infini.

Tant que n reste fini, la détermination de chaque élément se présente comme résultant d'une combinaison définie d'indices

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \ldots \alpha_n,$$

dont chacun est pris dans la suite des nombres de l'entrée correspondante, α_m parmi les ω_m nombres de la n^ième^ entrée. L'ordre des entrées est déterminé sans équivoque, et la détermination est complète lorsqu'on est arrivé à la $n^{\text{ième}}$ entrée.

La connaissance des indices détermine ainsi l'élément par une opération à sens unique, et il est également supposé que la connaissance de l'élément permet de déterminer successivement chaque indice par une opération à sens unique.

Si le nombre des entrées est supposé inépuisable, la détermination de chaque élément ne sera, au contraire, jamais complète; mais on peut la considérer comme atteinte à la limite sous la condition suivante.

A chaque combinaison définie $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ doit correspondre, par une opération à sens unique, une valeur numérique x', et n peut être pris assez grand pour que, x étant une valeur numérique correspondant par une opération à sens unique à un élément donné, la différence $x - x'$ soit dans un sens déterminé et puisse tomber au-dessous d'une grandeur assignable quelconque, si petite qu'elle soit.

Sous la même condition, la définition des ensembles de même puissance, telle que la donne M. Georg Cantor, peut être étendue à une correspondance, élément par élément, s'obtenant *à la limite* d'une opération à sens unique *poursuivie indéfiniment*.

Si, par exemple, on a

$$x = \frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_2}{\alpha^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha^3} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha^n} + \ldots,$$

et que chacun des numérateurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ puisse prendre toutes les α valeurs entières $0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1$; si l'on admet, d'autre part, que la détermination poursuivie jusqu'à l'entrée n donne

$$x' = \frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_2}{\alpha^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha^3} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha^n},$$

tel que $x - x'$ soit toujours positif et inférieur à $\frac{1}{\alpha^n}$, la condition énoncée ci-dessus sera remplie.

Or l'expression de x ci-dessus n'est autre que la représentation, dans le système de numération dont la base est α, d'un nombre réel quelconque compris entre 0 et 1, et *ne pouvant s'exprimer sous forme finie*. Cette dernière limitation est de rigueur, puisque, si le nombre pouvait s'exprimer sous forme finie, sa détermination pourrait être obtenue par une opération limitée, ce qui est contre l'hypothèse.

4. Ainsi la puissance de l'ensemble des éléments d'une table à un nombre ω indéfini d'entrées, chacune d'extension α, puissance que nous avons représentée par le symbole α^ω, sera la même que celle de l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1, et ne pouvant s'exprimer sous forme finie.

Soient, entre 0 et 1, R l'ensemble de tous les nombres réels, F celui de tous les nombres susceptibles d'être exprimés sous forme finie; on a donc l'équivalence

$$R - F \backsim \alpha^\omega.$$

Mais F est de la première puissance, R est d'une puissance supérieure; l'équivalence ne peut donc subsister que si α^ω est lui-même d'une puissance supérieure et égale à celle de R (*voir* le théorème F de M. Georg Cantor, *Acta mathematica,* p. 320).

Donc

$$R \backsim \alpha^\omega.$$

C. Q. F. D.

En ce qui concerne le symbole ω^ω, la représentation donnée par M. Georg Cantor, pour un nombre irrationnel quelconque

$$e = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n - \ddots}}}},$$

correspond à celle d'une table à une infinité d'entrées d'extension indéfinie. Elle indique donc que le symbole ω^ω n'a pas une puissance supérieure à celle de α^ω, et que, par suite, en restant dans l'ordre d'idée où nous nous sommes placés, il n'y a pas de puissance supérieure à la seconde.

Il convient, toutefois, de remarquer que cette conclusion n'a de valeur véritable que si l'on suppose que le premier des deux symboles dérive du second, alors qu'on établit une relation déterminée entre les nombres distincts qui croissent au delà de toute limite.

On peut facilement établir une représentation analogue à celle que nous avons indiquée pour les tables à ω entrées d'extension α, si l'on suppose, par exemple,

$$\omega = \alpha^{\nu} \quad \text{et} \quad \omega_1 = \nu\alpha^{\nu},$$

α étant un nombre entier positif déterminé quelconque, et ν parcourant la série des nombres entiers positifs.

On a alors

$$\omega^{\omega} = \alpha^{\nu\alpha^{\nu}} = \alpha^{\omega_1}.$$

Je ne m'arrêterai pas à cette représentation, qui n'offre aucun intérêt spécial.