BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE D'OCAGNE

Étude géométrique de la distribution des efforts autour d'un point dans une poutre rectangulaire et dans un massif de terre

Bulletin de la S. M. F., tome 12 (1884), p. 27-36

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1884__12__27_0>

Étude géométrique de la distribution des efforts autour d'un point dans une poutre rectangulaire et dans un massif de terre; par M. Maurice d'Ocagne.

(Séance du 18 janvier 1884.)

Poutre rectangulaire.

Il s'agit ici d'une poutre droite, à section rectangulaire, soumise à des efforts diversement inclinés sur son axe, mais tous parallèles à son plan moyen.

Soient, en un point quelconque de la poutre,

R la compression longitudinale:
S l'effort tangentiel sur la section normale;
φ l'angle que fait avec l'axe de la pièce un plan perpendiculaire au plan moyen et mené arbitrairement par le point considéré;
X la pression normale sur ce plan au point considéré;
Y l'effort tangentiel le long de ce plan au même point.

Les forces R, S, X, Y sont rapportées à l'unité de surface.

On sait que l'on a entre ces diverses quantités les deux relations

$$X = S\sin 2\varphi + \frac{R}{2}(1 - \cos 2\varphi), \tag{1}$$

$$Y = S\cos 2\varphi + \frac{R}{2}\sin 2\varphi, \tag{2}$$

qui font connaître X et Y pour toute valeur de φ.

Nous avons trouvé une construction géométrique bien simple de X et de Y, qui met en évidence la loi de distribution de ces efforts autour du point considéré et conduit à des remarques nouvelles, relativement à cette distribution. M. l'Ingénieur en chef Collignon nous a fait l'honneur d'exposer ce mode de représentation dans son Cours de Résistance des matériaux à l'École des Ponts et Chaussées. Nous allons le développer dans cette Note.

Supposons que l'on prenne le point M, dont les coordonnées sont X et Y. Pour avoir le lieu de ce point, éliminons l'angle φ entre les deux équations (1) et (2). A cet effet, écrivons la première de ces équations

$$(1') \qquad \frac{R}{2} - X = - S \sin 2\varphi + \frac{R}{2} \cos 2\varphi,$$

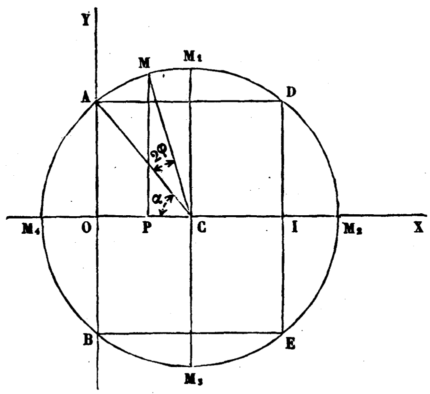
et ajoutons son carré au carré de (2); cela donne

$$\left(\frac{R}{2} - X\right)^2 + Y^2 = S^2 + \frac{R^2}{4},$$

équation d'un cercle dont le centre est sur OX à une distance de l'origine $OC = \frac{R}{2}$ et qui coupe l'axe OY aux points A et B, tels que $OA = OB = S$.

Pour déterminer sur ce cercle la position du point M, corres-

Fig. 1.



pondant à une valeur donnée de φ, divisons (2) par (1'); cela nous donne

$$\frac{Y}{\frac{R}{2} - X} = \frac{S \cos 2\varphi + \frac{R}{2} \sin 2\varphi}{\frac{R}{2} \cos 2\varphi - S \sin 2\varphi}.$$

Remarquant que $Y = MP$, $\frac{R}{2} - X = PC$, et $\frac{S}{\frac{R}{2}} = \tan g\alpha$, α étant l'angle ACO, on tire de l'équation précédente

$$\frac{MP}{PC} = \text{tang}(\alpha + 2\varphi);$$

par suite,

$$\widehat{MCP} = \alpha + 2\varphi$$

et

$$\widehat{MCA} = 2\varphi.$$

De ce qui précède, résulte la construction suivante :

Formons le rectangle ABED *ayant pour côtés* $AD = R$ *et* $AB = 2S$, *et traçons le cercle circonscrit à ce rectangle; puis tirons le rayon* AC, *et la médiane* OI, *qui joint les milieux des côtés opposés* AB *et* DE; *cela fait, menons par le centre* C *une droite* CM *faisant avec le rayon* AC *un angle* ACM *égal à* 2φ, *et abaissons du point* M, *où cette droite coupe le cercle circonscrit, la perpendiculaire* MP *sur* OI; OP *est égal à* X *et* MP *à* Y.

On se rend ainsi compte, par la seule inspection de la figure, de la distribution des efforts autour du point considéré, c'est-à-dire des variations simultanées de X et de Y quand φ varie de zéro à π.

Nous poserons $S^2 + \frac{R^2}{4} = r^2$ et nous appellerons, dans ce qui suit, r le *rayon de distribution,* α l'*angle de distribution* pour le point considéré.

Faisons varier le point M sur le cercle, à partir du point A [1].

Au point A, $\varphi = 0$, $Y = S$, $X = 0$.

Au point M_1, Y *est maximum,* et l'on a $Y = r$, $X = \frac{R}{2}$; quant à l'angle φ, il est déterminé par $2\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Au point D, $Y = S$, $X = R$ et l'angle φ est donné par $2\varphi = \pi - 2\alpha$. Donc, *pour le plan dont l'inclinaison sur l'axe est le complément de l'angle de distribution, l'effort tangentiel est égal à*

---

[1] Il est bien entendu que, lorsque nous parlons, dans la suite, des efforts exercés sur divers plans, nous ne considérons que les efforts pris sur ces plans au point considéré dans la poutre.

l'effort tangentiel dans la section normale, et la pression normale est égale à la compression longitudinale.

Au point M_2, X *est maximum;* on a $Y = 0$, $X = R + r$ et $2\varphi = \pi - \alpha$.

Au point E, $Y = -S$, $X = R$, $2\varphi = \pi$, ce qu'on savait *a priori.*

Au point M_3, Y *a, en valeur absolue, un maximum;* on a $Y = -r$, $X = \frac{R}{2}$, $2\varphi = \frac{3\pi}{2} - \alpha$.

Au point B, $Y = -S$, $X = 0$, $2\varphi = 2\pi - 2\alpha$ ou $\varphi = \pi - \alpha$.

Du point B au point A, c'est-à-dire pour φ variant de $\pi - \alpha$ à π, X est négatif; il y a, par suite, extension au lieu de compression.

Enfin, au point M_4, X *a, en valeur absolue, un maximum,* et l'on a $Y = 0$, $X = -\left(r - \frac{R}{2}\right)$, $2\varphi = 2\pi - \alpha$.

En somme, le maximum absolu de X a lieu en M_2 et répond à une compression; en M_4, ce n'est qu'un maximum relatif, répondant à une extension.

On voit qu'à deux positions du point M symétriques, par rapport à Ox, correspondent la même pression normale et des efforts tangentiels égaux et de signes contraires; or, si φ et φ' sont les inclinaisons correspondantes, on a $2\varphi + 2\varphi' = 2\widehat{ACI} = 2(\pi - \alpha)$, ou $\varphi + \varphi' = \pi - \alpha$; d'où cette propriété :

Pour deux plans dont la somme des inclinaisons sur l'axe est égale au supplément de l'angle de distribution, les pressions normales sont les mêmes et les efforts tangentiels sont égaux et de signes contraires.

Prenons maintenant deux positions du point M, symétriques par rapport à $M_1 M_3$; nous voyons alors que, *pour deux plans dont la somme des inclinaisons sur l'axe est égale au complément de l'angle de distribution, les efforts tangentiels sont les mêmes et la somme des pressions normales est égale à la compression longitudinale.*

A une valeur donnée du rayon de distribution répondent une infinité de points dans la poutre; prenons deux quelconques de ces points Z et Z'; la valeur commune de leurs rayons de distribution sera r, leurs angles de distribution seront α et α', les compressions longitudinales en ces points R et R'.

Nous aurons les distributions relatives à ces deux points en inscrivant dans le cercle de rayon r, deux rectangles ayant mêmes médianes, et dont les bases seront respectivement R et R'. Prenons un point M quelconque sur le cercle circonscrit; ce point M détermine pour le point Z, X, Y et φ, et pour le point Z', X', Y' et φ'; de plus la figure montre que

$$2\varphi + \alpha = 2\varphi' + \alpha' \quad \text{ou} \quad \varphi' = \varphi + \frac{\alpha - \alpha'}{2},$$

$$Y' = Y$$

et

$$X' = X + \frac{R' - R}{2}.$$

On peut donner une interprétation très simple de ces formules à l'aide des considérations suivantes :

Prenons, en un point Z quelconque de la poutre, un plan incliné de l'angle φ sur l'axe de la pièce, et marquons, pour ce point, l'effort tangentiel $ZT = Y$ et la pression normale $ZN = X$; quand on fera varier l'angle φ, le point T décrira une courbe que nous appellerons *courbe des efforts tangentiels* et le point N une courbe qui sera dite *courbe des pressions normales.*

Ces définitions étant posées, les formules précédentes conduiront à l'énoncé suivant :

Considérons, au point Z, *la courbe des efforts tangentiels et la courbe des pressions normales; laissant la première intacte, augmentons tous les vecteurs de la seconde de la quantité constante* $\frac{R' - R}{2}$; *puis, faisons tourner toute la figure de l'angle* $\frac{\alpha - \alpha'}{2}$ *dans le sens où se comptent les angles* φ *et transportons-la parallèlement à elle-même au point* Z'; *nous aurons ainsi les deux courbes d'efforts relatives à ce dernier point.*

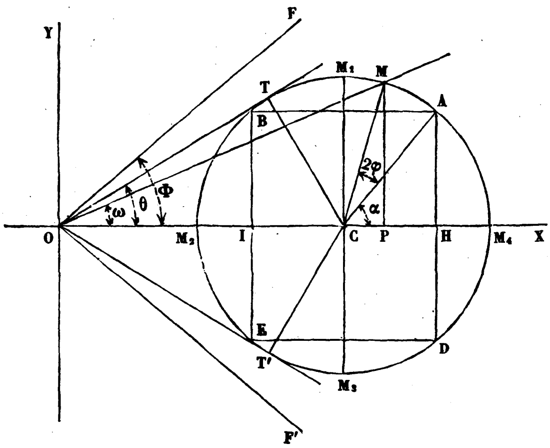
Donc, en tous les points où le rayon de distribution a une même valeur donnée, la courbe des efforts tangentiels est la même, à l'orientation près, et la courbe des pressions normales est la même, à l'orientation et à une constante près, ajoutée à tous les vecteurs.

Massif de terre.

Soient, en un point quelconque d'un massif de terre sans cohésion, indéfini en un sens :

N_1 et N_2 les pressions normales qui s'exercent sur deux plans rectangulaires se coupant suivant une droite Δ parallèle à la direction indéfinie du massif et passant au point considéré;
T la pression tangentielle sur l'un de ces plans, qui est aussi la pression tangentielle sur l'autre;
φ l'angle que fait avec le premier de ces plans un plan quelconque passant par la droite Δ;
X la pression normale sur ce plan au point considéré;
Y la pression tangentielle sur ce plan au même point;
ω l'angle que fait avec la normale à ce plan la pression totale, résultante de X et de Y;
Φ l'angle de frottement des terres considérées.

Fig. 2.



Les équations d'équilibre données par M. Maurice Lévy, et qui s'obtiennent très aisément, sont

$$X = N_1 \cos^2\varphi + N_2 \sin^2\varphi - 2T \sin\varphi \cos\varphi,$$

$$Y = (N_1 - N_2) \sin\varphi \cos\varphi + T(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

qu'on peut écrire

$$X - \frac{N_1 + N_2}{2} = \frac{N_1 - N_2}{2} \cos 2\varphi - T \sin 2\varphi,$$

$$Y = \frac{N_1 - N_2}{2} \sin 2\varphi + T \cos 2\varphi.$$

Comme précédemment, considérons le point M dont les coordonnées, comptées suivant des axes rectangulaires, sont X et Y. Le lieu décrit par ce point, lorsqu'on fait varier l'angle φ, a pour équation

$$\left(X - \frac{N_1 + N_2}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{N_1 - N_2}{2}\right)^2 + T^2;$$

c'est un cercle dont le centre C est sur l'axe OX, à une distance de l'origine $OC = \frac{N_1 + N_2}{2}$ et dont le rayon est

$$r = \sqrt{\left(\frac{N_1 - N_2}{2}\right)^2 + T^2}.$$

Portons $CH = \frac{N_1 - N_2}{2}$, et sur la perpendiculaire élevée à OX par le point H, $HA = T$; AC sera égal à r.

Pour déterminer sur ce cercle la position du point M correspondant à une valeur donnée de l'angle φ, divisons les deux équations membre à membre,

$$\frac{Y}{X - \frac{N_1 + N_2}{2}} = \frac{\frac{N_1 - N_2}{2} \sin 2\varphi + T \cos 2\varphi}{\frac{N_1 - N_2}{2} \cos 2\varphi - T \sin 2\varphi}.$$

Remarquant que

$$Y = MP, \quad X - \frac{N_1 + N_2}{2} = PC$$

et

$$\frac{T}{\frac{N_1 - N_2}{2}} = \frac{AH}{HC} = \operatorname{tang} \alpha,$$

nous tirons de là

$$\frac{MP}{PC} = \operatorname{tang}(\alpha + 2\varphi);$$

d'où

$$\widehat{MCP} = \alpha + 2\varphi$$

et

$$\widehat{MCA} = 2\varphi.$$

Ainsi donc, pour une valeur quelconque de φ, il suffit de faire l'angle MCA égal à 2φ et d'abaisser la perpendiculaire MP sur OX; on a

$$MP = Y \quad \text{et} \quad OP = X.$$

Comme précédemment, nous appellerons le cercle ainsi tracé *cercle de distribution* au point considéré; r sera le *rayon de distribution,* α l'*angle de distribution,* O le *pôle de la distribution.*

Tirons OM; l'angle MOC est précisément l'angle ω. Pour que que le massif soit stable au point considéré, il faut que, pour aucune direction prise autour de ce point, l'angle ω n'atteigne la valeur de l'angle Φ du frottement. Traduisons géométriquement cette condition; tirons les droites OF et OF′ inclinées de l'angle Φ sur OX; il faut que les droites ainsi menées soient extérieures au cercle de distribution; on peut encore dire que l'angle θ que font avec OX les tangentes OT et OT′, menées du pôle au cercle de distribution, doit être inférieur à Φ. Le cas limite est celui où $\theta = \Phi$; les angles $\frac{ACT}{2}$ et $\frac{ACT'}{2}$ définissent alors les directions de glissement.

L'angle θ se calcule immédiatement par

$$\tang\theta = \frac{CT}{OT} = \sqrt{\frac{CT}{OC^2 - CT^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{N_1 - N_2}{2}\right)^2 + T^2}{\left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{N_1 - N_2}{2}\right)^2 - T^2}} = \sqrt{\frac{(N_1 - N_2)^2 + 4T^2}{4N_1N_2 - 4T^2}}.$$

Les directions orthopiéziques, pour lesquelles $\omega = 0$, sont immédiatement fournies par les points M_2 et M_4, et l'on a, au point M_2,

$$2\varphi = \pi - \alpha;$$

au point M_4,

$$2\varphi = 2\pi - \alpha;$$

par suite, en chacun de ces points,

$$\tang 2\varphi = -\tang\alpha = -\frac{T}{\frac{N_1 - N_2}{2}}.$$

Remarquons en outre qu'au point M_4 a lieu le maximum de la pression normale, et au point M_2 son minimum ; en M_4,

$$X = \frac{N_1 + N_2}{2} + r;$$

en M_2,

$$X = \frac{N_1 + N_2}{2} - r.$$

Les maxima de la pression tangentielle sont donnés par le point M_1, pour lequel

$$2\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

et par le point M_3, pour lequel

$$2\varphi = \frac{3\pi}{2} - \alpha;$$

en M_1,

$$X = \frac{N_1 + N_2}{2}, \quad Y = r;$$

en M_3,

$$X = \frac{N_1 + N_2}{2}, \quad Y = -r.$$

Prenant deux positions du point M symétriques par rapport au centre C, on a cette propriété :

Pour deux directions de plan rectangulaires, les pressions tangentielles sont égales et de signes contraires, et la somme des pressions normales est constante.

Prenons maintenant deux positions du point M symétriques par rapport à M_2M_4; nous avons :

Pour deux directions de plan dont la somme des inclinaisons sur le plan de comparaison est égale au supplément de l'angle de distribution, les pressions normales sont les mêmes et les pressions tangentielles sont égales et de signes contraires.

Enfin, considérant deux positions du point M symétriques par rapport à M_1M_3, on a :

Pour deux directions de plan dont la somme des inclinaisons sur le plan de comparaison est égale au complément de *l'angle de distribution les, pressions tangentielles sont les mêmes et la somme des pressions normales est constante.*

On peut répéter la remarque qui a été faite plus haut, pour les points où le rayon de distribution a la même valeur.