BULLETIN DE LA S. M. F.

H. POINCARÉ

Sur la réduction des intégrales abéliennes

Bulletin de la S. M. F., tome 12 (1884), p. 124-143

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1884__12__124_0>

Sur la réduction des intégrales abéliennes;
Par M. H. Poincaré.

1. Tous les lecteurs de ce Bulletin connaissent les remarquables travaux de M. Picard *Sur la réduction des intégrales abéliennes,* qui, après avoir paru dans divers numéros des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* ont été réunis ici même en un Mémoire unique. La même question a été l'objet des recherches des géomètres étrangers, et en particulier des géomètres allemands.

En 1874, M^me^ Kowalevski a envoyé à l'Université de Göttingen un Mémoire qui va paraître dans les *Acta Mathematica.* Dans ce Mémoire (*Ueber die Reduction einer bestimmten Klasse Abel'schen Integrale 3^ten^ Ranges auf elliptische Integrale*), elle cite les deux théorèmes suivants, dus à M. Weierstrass :

Si l'on envisage un système de ρ intégrales abéliennes de rang ρ, parmi lesquelles il y en a une qui est susceptible d'être réduite aux intégrales elliptiques, et si l'on considère également la fonction Θ correspondante :

1° *Cette fonction Θ à ρ variables peut être changée, par une* transformation *d'ordre k, dans le produit d'une fonction Θ à une variable et d'une fonction Θ à $\rho - 1$ variables.*

2° *Elle peut également par une transformation* linéaire, *c'est-à-dire du premier ordre, être amenée à une forme telle que, le tableau des périodes s'écrivant comme il suit :*

$$(A)\qquad \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1\rho}, \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2\rho}, \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots, \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tau_{\rho 1} & \tau_{\rho 2} & \dots & \tau_{\rho\rho} \end{matrix}\right.$$

avec les conditions habituelles

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha},$$

la période τ_{12} soit commensurable et que les périodes

$$\tau_{13}, \tau_{14}, \dots, \tau_{1\rho}$$

soient nulles.

Le premier de ces théorèmes a été communiqué à M. Königsberger et le second à M$^{\text{me}}$ Kowalevski par des lettres de M. Weierstrass. Mais ils ne paraissent pas avoir été publiés.

Le premier de ces théorèmes peut se généraliser comme il suit :

Si l'on envisage un système de ρ intégrales abéliennes de première espèce et de rang ρ, parmi lesquelles il y en a μ qui sont susceptibles d'être réduites au rang μ, la fonction Θ correspondante à ρ variables peut être changée par une transformation d'ordre k, dans le produit d'une fonction Θ à μ variables et d'une fonction Θ à $\rho - \mu$ variables.

Le second théorème est également susceptible d'une généralisation, ainsi qu'on le verra plus loin.

Il n'est pas douteux que ces généralisations ne soient connues de M. Weierstrass; mais, comme il serait difficile en France de s'en procurer la démonstration, je crois qu'il ne sera pas inutile de la développer ici, ignorant d'ailleurs si la marche que je vais suivre est la même qu'a employée l'illustre analyste allemand.

2. Soit

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2\rho}$$

un système quelconque de 2ρ périodes. Posons

$$x_i = \sum_{k=1}^{k=2\rho} a_{ik} x'_k, \tag{1}$$

$x'_1, x'_2, \ldots, x'_{2\rho}$ désignant un nouveau système de 2ρ périodes, et les coefficients a_{ik} étant entiers. Il est clair que toute fonction qui admettra les nouvelles périodes x' admettra également les anciennes périodes x.

Si, de plus, le déterminant des a_{ik} est égal à $+1$, les nouvelles périodes x' pourront réciproquement s'exprimer linéairement à l'aide des anciennes par des expressions à coefficients entiers. Les deux systèmes de périodes seront alors *équivalents*.

Soit une fonction de ρ variables admettant 2ρ périodes linéairement indépendantes. Ces 2ρ périodes formeront un système *primitif,* si toute autre période s'exprime à l'aide des 2ρ périodes considérées, par une expression linéaire à coefficients entiers. Tous les systèmes primitifs sont équivalents.

Un système de μ périodes ($\mu < 2\rho$) sera un système incomplet; il sera *primitif* si on peut le compléter en lui adjoignant $2\rho - \mu$ nouvelles périodes convenablement choisies, de telle façon que le système ainsi complété soit lui-même primitif.

Soit

$$x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho}$$

un système *complet primitif*. Formons un système incomplet

$$(2)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,2\rho}x_{2\rho} = x'_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,2\rho}x_{2\rho} = x'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{\mu,1}x_1 + a_{\mu,2}x_2 + \ldots + a_{\mu,2\rho}x_{2\rho} = x'_\mu, \end{cases}$$

où les coefficients sont entiers. Pour que ce système soit primitif, il faut et il suffit que les déterminants compris dans la matrice

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,2\rho} \\ a_{2,1} & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{\mu,1} & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix}$$

aient pour plus grand commun diviseur l'unité.

Envisageons l'ensemble des périodes qui peuvent s'écrire

$$\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \ldots + \alpha_\mu x'_\mu,$$

les α étant *commensurables* et les x' étant toujours les périodes du système incomplet (2). *Toutes* ces périodes pourront s'exprimer linéairement à l'aide de μ d'entre elles $x''_1, x''_2, \ldots, x''_\mu$ par une expression à coefficients entiers. Si le système des x' est primitif, il est équivalent au système des x''. Si le système des x' n'est pas primitif, le système des x'', *qui est toujours primitif*, pourra s'appeler la base du système (2).

Dire que, dans un système de ρ intégrales abéliennes de première espèce et de rang ρ, il y en a μ linéairement indépendantes, qui sont susceptibles d'être réduites au rang μ, c'est dire que l'on peut trouver un système de $2\rho - 2\mu$ périodes qui sont nulles à la fois dans ces μ intégrales.

On peut toujours supposer que ce système incomplet est primitif; car, s'il existe un système incomplet non primitif de $2\rho - 2\mu$ périodes qui soient nulles à la fois dans μ intégrales, la *base* de ce système non primitif jouira de la même propriété. D'où la conséquence suivante :

On peut toujours trouver, pour nos ρ intégrales abéliennes, un système primitif de 2ρ périodes, de telle façon que les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes soient nulles dans μ des ρ intégrales considérées.

3. Mais ce système primitif ne sera pas en général un système de *périodes normales*.

A chaque système primitif de périodes de ρ intégrales abéliennes est attachée une forme bilinéaire à deux séries de 2ρ variables

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho}; y_1, y_2, \ldots, y_{2\rho}).$$

Si dans cette forme on remplace $x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho}$ par les périodes (formant le système primitif considéré) d'une de nos ρ intégrales abéliennes et $y_1, y_2, \ldots, y_{2\rho}$ par les périodes correspondantes d'une seconde intégrale, la forme s'annule.

Si l'on y remplace les x par les parties réelles des périodes d'une des intégrales et les y par les parties imaginaires de ces mêmes périodes, le résultat de cette substitution sera positif.

La forme F est une forme bilinéaire *identique*, c'est-à-dire que l'on a identiquement

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho}; x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho}) = 0.$$

On sait que les formes bilinéaires identiques ont un seul invariant qui est le déterminant où le $m^{\text{ième}}$ terme de la $n^{\text{ième}}$ colonne est le coefficient de $x_m y_n$. Cet invariant, qui est toujours un carré parfait, est égal à 1 dans le cas qui nous occupe.

Une force bilinéaire d'invariant 1 est *réduite* lorsqu'elle s'écrit

$$(3) \qquad x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3 + \ldots + x_{2\rho-1} y_{2\rho} - x_{2\rho} y_{2\rho-1}.$$

Le système primitif considéré est alors un système de *périodes normales*.

Qu'arrive-t-il maintenant lorsque l'on passe d'un système primitif à un autre système primitif équivalent? Posons, comme plus haut,

$$(1) \qquad x_i = \sum_{k=1}^{k=2\rho} a_{ik} x'_k,$$

les a_{ik} étant des entiers dont le déterminant sera égal à 1. Les x' formeront comme les x un système primitif, et si l'on désigne par y'_k la période de la seconde intégrale qui correspond à x'_k, on aura

$$y_i = \sum_{k=1}^{k=2\rho} a_{ik} y'_k. \tag{1 bis}$$

En remplaçant dans F les x et les y par leurs valeurs (1) et (1 *bis*), on obtiendra une forme bilinéaire en x' et en y', arithmétiquement équivalente à F et d'invariant 1. Ce sera la forme bilinéaire correspondant au système primitif des x'.

On pourra toujours choisir la substitution linéaire (1), de telle façon que la forme F ainsi transformée soit réduite, et par conséquent que le système primitif des x' soit un système de périodes normales (*Cf.* Clebsch et Gordan, *Abelsche Functionen,* p. 106). Il existe également des substitutions linéaires qui changent la forme (3) en elle-même et qui, par conséquent, changent un système de périodes normales en un autre système de périodes normales (*loc. cit.,* p. 300). C'est ce qu'on appelle les *transformations linéaires ou du premier ordre.*

Imaginons maintenant que dans les relations (1) et (1 *bis*) les a_{ik} soient encore entiers, mais que leur déterminant soit égal à $\Delta (\Delta > 1)$. Alors le système des x' ne sera plus un système de périodes de nos intégrales abéliennes, mais ce sera un système de périodes, primitif ou non, d'*autres* intégrales abéliennes.

Si l'on remplace dans F les x et les y par leurs valeurs (1) et (1 *bis*), on obtiendra une forme bilinéaire identique en x' et y', d'invariant Δ^2.

Je dirai qu'une pareille forme est réduite lorsqu'elle s'écrira

$$k_1(x_1 y_2 - x_2 y_1) + k_2(x_3 y_4 - x_4 y_3) + \ldots + k_\rho(x_{2\rho-1} y_{2\rho} - x_{2\rho} y_{2\rho-1}), \tag{4}$$

et il est aisé de voir que l'on peut toujours *réduire* une forme bilinéaire identique par une substitution linéaire à coefficients entiers et de déterminant 1.

Supposons en particulier que la forme F soit réduite, de telle façon que les x soient les périodes normales des intégrales abéliennes données. Supposons, de plus, qu'après la transformation notre forme soit encore réduite, c'est-à-dire qu'elle se réduise à une expression telle que (4), et de telle sorte que

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_\rho = k.$$

Alors les x' seront les périodes normales d'un nouveau système d'intégrales abéliennes; par conséquent la substitution (1) aura changé un système de périodes normales en un autre système de périodes normales, mais appartenant à de *nouvelles* intégrales. Elle s'appellera alors une *transformation d'ordre k.*

4. Ces préliminaires posés, passons à la démonstration du premier théorème de M. Weierstrass, généralisé.

Nous avons supposé que, les x formant un système primitif de périodes et F étant la forme correspondante, les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes étaient nulles pour μ de nos ρ intégrales. Posons encore

$$(1) \qquad x_i = \Sigma a_{ik} x'_k, \quad y_i = \Sigma a_{ik} y'_k,$$

les a_{ik} étant entiers, mais leur déterminant étant en général plus grand que 1.

Si les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes du nouveau système ne dépendent que des $2\rho - 2\mu$ dernières périodes de l'ancien système, si, en d'autres termes, on a

$$(5) \qquad a_{ik} = 0$$
$$(i = 2\mu+1,\ 2\mu+2,\ \ldots,\ 2\rho-1,\ 2\rho;\quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2\mu-1,\ 2\mu),$$

les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes du nouveau système seront nulles comme celles de l'ancien pour les μ intégrales dont il vient d'être question.

Si l'on peut trouver une substitution linéaire de la forme (1) satisfaisant aux conditions (5) et réduisant le système de périodes à un système de périodes normales des intégrales transformées; si, en d'autres termes, on peut trouver une pareille substitution qui réduise la forme F à une expression, telle que (4), avec les conditions

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_\rho = k,$$

le théorème énoncé sera démontré.

Remarquons même qu'il le sera encore, si nous arrivons au même résultat en appliquant *successivement* à notre forme F plusieurs substitutions assujetties aux conditions que nous venons d'énoncer; car la résultante de deux pareilles substitutions satisfait également à ces mêmes conditions.

Quand dans la forme F on annule les $2\rho - 2\mu$ derniers x et les $2\rho - 2\mu$ derniers y, il reste une forme bilinéaire F_1 admettant deux séries de 2μ variables, $x_1, x_2, \ldots, x_{2\mu}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{2\mu}$. Je puis toujours supposer qu'elle est réduite et s'écrit

$$F_1 = k_1(x_1y_2 - x_2y_1) + k_2(x_3y_4 - x_4y_3) + \ldots \\ + k_\mu(x_{2\mu-1}y_{2\mu} - x_{2\mu}y_{2\mu-1});$$

car, si cela n'était pas, on ferait subir aux variables une substitution linéaire de déterminant 1, *ne portant que sur les* 2μ *premières périodes*, et qui réduirait la forme F_1.

Nous pourrons alors écrire

$$F = F_1 + F_2 + F_3,$$

F_1 ne contenant que les 2μ premières périodes, F_2 ne contenant que les $2\rho - 2\mu$ dernières et F_3 représentant l'ensemble des termes qui dépendent à la fois d'une des 2μ premières et d'une des $2\rho - 2\mu$ dernières.

Nous allons chercher par une suite de substitutions linéaires à faire disparaître successivement tous les termes de F_3.

Soit, par exemple, à faire disparaître un terme

$$a(x_1y_i - x_iy_1),$$

x_i étant une des $2\rho - 2\mu$ dernières périodes; nous poserons

$$x_2 = x'_2 - ax'_i, \quad x_i = k_1x'_i;$$

de même, si l'on veut faire disparaître un terme

$$b(x_2y_i - x_iy_2),$$

on posera

$$x_1 = x'_1 + bx'_i, \quad x_i = k_1x'_i,$$

et ainsi de suite.

Toutes ces substitutions satisfont aux conditions (5) et l'on obtiendra finalement une forme F' transformée de F qui s'écrira

$$F' = F'_1 + F'_2, \tag{6}$$

F'_1 ne dépendant que des 2μ premières et F'_2 des $2\rho - 2\mu$ dernières périodes du nouveau système : *les deux catégories de périodes sont séparées*. La forme F'_1, ne différant d'ailleurs de F_1 qu'en ce que les anciennes variables sont remplacées par les nouvelles, sera réduite. On réduira ensuite la forme F'_2 par une substitution linéaire de déterminant 1 *ne portant que surles* $2\rho - 2\mu$ *dernières périodes;* la forme F' transformée se réduira alors à une expression telle que (4), d'où il est aisé de passer à l'expression

$$k(x_1 y_2 - x_2 y_1) + k(x_3 y_4 - x_4 y_3) + \ldots + k(x_{2\rho-1} y_{2\rho} - x_{2\rho} y_{2\rho-1})$$

C. Q. F. D.

5. Mais on peut craindre, en suivant la marche qui précède, d'être conduit à employer une transformation d'ordre trop élevé. C'est ce qui nous amène à nous poser le problème suivant :

Trouver toutes les substitutions satisfaisant aux conditions (5) *et qui ramènent la transformée* F' *de* F *à la forme* (6), *où les deux catégories de périodes sont séparées.*

Ce problème se ramène au suivant :

Trouver toutes les substitutions linéaires portant sur les $2\rho - 2\mu$ *dernières périodes et telles qu'après la transformation tous les coefficients des termes qui contiennent à la fois* x_1 *ou* x_2 *et une des* $2\rho - 2\mu$ *dernières périodes soient divisibles par* k_1; *que tous les coefficients des termes qui contiennent à la fois* x_3 *ou* x_4 *et une des* $2\rho - 2\mu$ *dernières périodes soient divisibles par* k_3; etc.

Soit

$$F_3 = \Sigma b_{ik}(x_i y_k - x_k y_i)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 2\mu; \quad k = 2\mu + 1, 2\mu + 2, \ldots, 2\rho).$$

Posons maintenant

$$x_k = \Sigma_h c_{kh} x'_h$$
$$(k = 2\mu + 1, 2\mu + 2, \ldots, 2\rho; \quad h = 2\mu + 1, 2\mu + 2, \ldots, 2\rho),$$

d'où

$$F_3 = \Sigma b_{ik} c_{kh}(x_i y'_h - x'_h y_i).$$

Les conditions énoncées se réduisent à

$$\Sigma_k b_{ik} c_{kh} \equiv 0 \pmod{k_l} \tag{7}$$

(en supposant $i = 2l$ ou $2l - 1$).

Le nombre total des congruences (7) est $2\mu(2\rho - 2\mu)$. Il est aisé de voir de quelle forme en est la solution générale; on trouve

$$c_{kh} = \Sigma_m d_{km} \alpha_{mh}.$$

Dans cette expression, les d ont des valeurs déterminées; les α peuvent prendre toutes les valeurs entières positives ou négatives; enfin l'indice m varie, comme les indices k et h eux-mêmes, depuis $2\mu + 1$ jusqu'à 2ρ. Il résulte de là que la substitution

$$x_k = \Sigma c_{kh} x'_h$$

peut être regardée comme la résultante des deux substitutions suivantes :

$$(8) \qquad x_k = \Sigma d_{km} x''_m,$$

$$(9) \qquad x''_m = \Sigma \alpha_{mh} x'_h.$$

La substitution (8) est la plus simple de toutes les substitutions linéaires qui satisfont aux congruences (7), pendant que (9) est une substitution linéaire *quelconque* à coefficients entiers.

Ainsi l'on obtiendra toutes les substitutions qui satisfont auxdites congruences en faisant suivre la plus simple d'entre elles d'une substitution *quelconque* à coefficients entiers. Nous pourrons donc nous borner à envisager la substitution (8) elle-même.

Appliquons donc à notre forme F la substitution (8); tous les coefficients de F_3 satisferont aux congruences (7). Par exemple, le coefficient du terme $x_1 y_i - y_1 x_i$, x_i étant une des $2\rho - 2\mu$ dernières périodes, sera divisible par k_1, et ce terme s'écrira

$$a k_1 (x_1 y_i - y_1 x_i),$$

de sorte qu'on pourra le faire disparaître en posant simplement

$$x_2 = x'_2 - a x_i,$$

c'est-à-dire par une substitution de *déterminant* 1.

Ce sera là la manière la plus simple de faire disparaître tous les termes de F_3. Si, après avoir séparé, comme nous venons de le dire, les deux catégories de périodes, on applique à la forme F une substitution linéaire quelconque ne portant que sur les 2μ premières périodes, puis une substitution linéaire quelconque ne portant que sur les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes, il est clair que, dans la forme ainsi transformée, les deux catégories de périodes seront encore séparées. On est ainsi conduit à une infinité de manières de faire disparaître tous les termes de F_3, et il est aisé de voir qu'*il n'y en a pas d'autres.*

6. Occupons-nous maintenant de démontrer le second théorème de M. Weierstrass. Nous supposons qu'une intégrale est réductible aux intégrales elliptiques, et par conséquent $\mu = 1$. Dans le système primitif d'où nous partons, les $2\rho - 2$ dernières périodes sont nulles. Il s'agit de ramener ce système à un système *normal*, mais cette fois par une transformation de *déterminant* 1. Nous devons de plus supposer que dans le nouveau système les $2\rho - 3$ dernières périodes ne dépendent que des $2\rho - 2$ dernières périodes de l'ancien système (de façon qu'elles soient nulles dans l'intégrale réductible), et que la deuxième et la troisième nouvelles périodes ne dépendent que des $2\rho - 1$ dernières périodes de l'ancien système (de façon qu'elles soient commensurables entre elles dans l'intégrale réductible).

Quand la possibilité d'une pareille réduction sera établie, le théorème de M. Weierstrass sera démontré.

Nous avons encore notre forme

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

qu'il s'agit de réduire. Ici

$$F_1 = a_2(x_1 y_2 - x_2 y_1),$$
$$F_3 = \Sigma a_i(x_1 y_i - x_i y_1) + \Sigma b_i(x_2 y_i - x_i y_2).$$

Nous poserons d'abord

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1, \\ a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_{2\rho} x_{2\rho} &= x'_2, \\ \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_{2\rho} x_{2\rho} &= x'_3, \\ \beta_{i,3} x_3 + \ldots + \beta_{i,2\rho} x_{2\rho} &= x'_i, \quad (i > 3). \end{aligned}$$

C'est là une substitution linéaire satisfaisant aux conditions énoncées, *pourvu que son déterminant soit égal à* 1. Or, les coefficients $a_2, a_3, \ldots, a_{2\rho}$ devant être premiers entre eux, puisque l'invariant de F est égal à 1, on pourra toujours choisir les α et les β de telle façon que ce déterminant soit égal à 1.

Après cette substitution la forme F se changera en

$$F' = F'_1 + F'_2 + F'_3,$$

où

$$F'_1 = x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1, \quad F'_3 = \Sigma c_i (x'_2 y'_i - x'_i y'_2).$$

Il suffira pour faire disparaître F'_3 de poser

$$x'_1 = x''_1 + \Sigma c_i x'_i.$$

Après cette nouvelle transformation, la forme F deviendra

$$F'' = x''_1 y''_2 - x''_2 y''_1 + F''_2.$$

Il reste à réduire F''_2, mais de telle façon que les $2\rho - 3$ dernières périodes du nouveau système ne dépendent que des $2\rho - 3$ dernières périodes de l'ancien. Cela peut se faire absolument de la même manière.

Nous pouvons écrire, en effet, en supprimant les accents,

$$F''_2 = \Sigma d_i (x_3 y_i - x_i y_3) + \Sigma e_i (x_4 y_i - x_i y_4) + F''_4,$$

où i est plus grand que 3 et où F''_4 ne dépend que des $2\rho - 4$ dernières périodes. Nous poserons alors

$$\begin{aligned} x_3 &= x'_3, \\ x'_4 &= d_4 x_4 + d_5 x_5 + \ldots + d_{2\rho} x_{2\rho}, \\ x'_i &= \delta_{i,4} x_4 + \delta_{i,5} x_5 + \ldots + \delta_{i,2\rho} x_{2\rho}, \end{aligned}$$

en choisissant les δ de façon que le déterminant de cette substitution linéaire soit égal à 1.

Il viendra après transformation

$$F'''_2 = x'_3 y'_4 - x'_4 y'_3 + \Sigma f_i (x'_4 y'_i - x'_i y'_4) + F'''_4;$$

F'''_4 ne dépend que des $2\rho - 4$ dernières périodes. Nous poserons

$$x'_3 = x''_3 + \Sigma f_i x'_i;$$

d'où, après la transformation,

$$F''''_2 = x''_3 y'_4 - x''_4 y''_3 + F''''_4.$$

Il reste enfin à réduire F''''_4, mais cette fois par une substitution *quelconque* de déterminant 1, ce qui se fera aisément.

Le second théorème de M. Weierstrass est donc démontré.

7. Occupons-nous maintenant de généraliser ce résultat en supposant que, au lieu d'une intégrale réductible aux fonctions elliptiques, nous ayons μ intégrales réductibles au genre μ. Supposons,

pour fixer les idées, $\mu = 2$, de telle façon que les $2\rho - 4$ dernières périodes de notre système primitif soient nulles pour nos μ intégrales. Notre forme F s'écrira encore

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

et nous pourrons supposer que F_1 est réduit de telle sorte que

$$\begin{aligned} F_1 &= a_2(x_1y_2 - x_2y_1) + b_4(x_3y_4 - x_4y_3), \\ F_3 &= \Sigma a_i(x_1y_i - x_iy_i) + \Sigma b_i(x_3y_i - x_iy_3) \\ &\quad + \Sigma c_i(x_2y_i - x_iy_2) + \Sigma d_i(x_4y_i - x_iy_4), \quad (i > 4). \end{aligned}$$

Posons

$$x_1 = x'_1, \quad x_3 = x'_3,$$

$$(10) \qquad \begin{cases} a_2x_2 + a_5x_5 + a_6x_6 + \ldots + a_{2\rho}x_{2\rho} = x'_2, \\ b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6 + \ldots + b_{2\rho}x_{2\rho} = x'_4, \end{cases}$$

$$x'_i = \Sigma \alpha_{ik}x_k,$$
$$(k = 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots,\ 2\rho), \quad (i = 5,\ 6,\ \ldots,\ 2\rho).$$

L'invariant de la forme F étant égal à $+1$, les déterminants contenus dans la matrice

$$\begin{vmatrix} a_2 & 0 & a_5 & a_6 & \ldots & a_{2\rho} \\ 0 & b_4 & b_5 & b_6 & \ldots & b_{2\rho} \end{vmatrix}$$

sont premiers entre eux. Il en résulte que l'on peut choisir les α, de telle sorte que le déterminant de la substitution linéaire (10) soit égal à 1.

Après cette transformation, la forme F deviendra

$$F' = F'_1 + F'_2 + F'_3,$$

où

$$\begin{aligned} F'_1 &= x'_1y'_2 - x'_2y'_1 + x'_3y'_4 - x'_4y'_3, \\ F'_3 &= \Sigma c'_i(x'_2y'_i - x'_iy'_2) + \Sigma d'_i(x'_4y'_i - x'_iy'_4). \end{aligned}$$

On posera alors

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x''_1 + \Sigma c'_ix''_i, \quad & x'_3 &= x''_3 + \Sigma d'_ix''_i, \\ x'_2 &= x''_2, \quad x'_4 = x''_4, \quad & x'_i &= x''_i, \end{aligned}\right\} (i > 4),$$

et la forme F se réduira à

$$F'' = (x''_1y''_2 - x''_2y''_1 + x''_3y''_4 - x''_4y''_3 + F''_2,$$

F''_2 ne dépendant que des $2\rho - 4$ dernières périodes. Il reste à réduire F''_2. Cette réduction une fois opérée, le système des périodes sera ramené à un système normal, et, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer, l'une quelconque des $2\rho - 4$ dernières périodes s'exprimera linéairement à l'aide de la deuxième et de la quatrième par une expression à coefficients commensurables.

Or nous pouvons toujours supposer que la deuxième période est égale à 1 dans la première de nos deux intégrales réductibles et à zéro dans la deuxième, et que la quatrième période est égale à zéro dans la première de ces deux intégrales et à 1 dans la deuxième. Voici quel sera alors le Tableau des périodes de ces deux intégrales

$$\begin{array}{cccccccc} A & 1 & B & 0 & a_5 & a_6 & \dots & a_{2\rho} \\ A' & 0 & B' & 1 & b_5 & b_6 & \dots & b_{1\rho} \end{array}$$

les a et les b étant commensurables.

Il s'agit maintenant de simplifier ce Tableau en transformant les périodes, *mais de façon qu'elles ne cessent pas d'être des périodes normales.*

Or, 1° les périodes ne cesseront pas d'être normales si l'on applique à une période de rang impair et à la période de rang pair qui la suit une substitution linéaire à deux variables et de déterminant 1.

Ainsi l'on peut poser, par exemple,

$$(11) \qquad a'_5 = \alpha a_5 + \beta a_6, \quad a'_6 = \gamma a_5 + \delta a_6, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

et remplacer dans le Tableau a_5 et a_6 par a'_5 et a'_6; le système de périodes ainsi défini sera encore *normal.*

On choisira les coefficients de cette substitution de telle façon que a'_6 soit nul; on opérera de la même manière sur chacune des $\rho - 2$ dernières paires de périodes, de façon à faire disparaître dans chacune d'elles les périodes de rang pair de la première intégrale; par conséquent on peut toujours supposer

$$a_6 = a_8 = a_{10} = \dots = a_{2\rho} = 0.$$

2° Posons

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a'_{2\mu-1} = \alpha a_{2\mu-1} + \beta a_{2\nu-1}, \quad a'_{2\nu-1} = \gamma a_{2\mu-1} + \delta a_{2\nu-1}, \\ a'_{2\mu} \;\; = \delta a_{2\mu} - \gamma a_{2\nu}, \quad\quad\;\; a'_{2\nu} \;\; = -\beta a_{2\mu} + \alpha a_{2\nu}, \\ \qquad\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \end{array} \right.$$

Si, dans le système des périodes, on remplace

$$a_{2\mu-1},\ a_{2\mu},\ a_{2\nu-1},\ a_{2\nu}$$

par

$$a'_{2\mu-1},\ a'_{2\mu},\ a'_{2\nu-1},\ a'_{2\nu},$$

ce système restera *normal*.

Appliquons la substitution (12) en faisant

$$\mu = \rho, \quad \nu = \rho - 1.$$

En choisissant les coefficients de la substitution, nous pourrons faire disparaître $a_{2\rho-1}$, sans que $a_{2\rho}$ et $a_{2\rho-2}$ cessent d'être nuls.

On appliquera ensuite la même substitution, en faisant

$$\mu = \rho - 1, \quad \nu = \rho - 2,$$

et l'on fera disparaître $a_{2\rho-3}$.

Et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les a, excepté a_5, soient nuls; on aura

$$a_6 = a_7 = a_8 = \ldots = a_{2\rho} = 0.$$

Opérons maintenant sur les b. Appliquons la substitution (11) aux $\rho - 3$ dernières paires de périodes, de façon à faire disparaître dans chacune d'elles les périodes de rang pair, ce qui s'écrit

$$b_8 = b_{10} = \ldots = b_{2\rho} = 0.$$

Nous ne pouvons opérer de même sur la paire $b_5 b_6$, sans quoi a_6 cesserait d'être nul.

Appliquons maintenant la substitution (12) aux deux dernières paires, de façon à faire disparaître $b_{2\rho-1}$, puis aux paires de rang $\rho - 2$ et $\rho - 1$, de façon à faire disparaître $b_{2\rho-3}$, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait

$$b_8 = b_9 = b_{10} = \ldots = b_{2\rho} = 0.$$

On ne peut opérer sur les troisième et quatrième paires, de façon à faire disparaître b_7, sans quoi a_7 cesserait d'être nul.

Toutes ces réductions faites, le Tableau des périodes s'écrit

$$\begin{array}{ccccccccccc} A & 1 & B & 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ A' & 0 & B' & 1 & b_5 & b_6 & b_7 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}$$

Il reste à faire disparaître b_6. Pour cela nous appliquerons la substitution (12) à la deuxième et à la troisième paire, de façon à faire disparaître la sixième période de la deuxième intégrale; le Tableau des périodes s'écrit alors, après cette dernière transformation,

$$\begin{matrix} A & 1 & B_1 & 0 & (\lambda+\mu B_1) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ A' & 0 & B'_1 & 1 & (\lambda'+\mu B'_1) & 0 & \nu & \ldots & 0 \end{matrix}$$

où λ, μ et ν sont commensurables et où il est aisé de voir que $A' = B_1$.

Le résultat ainsi obtenu se généralise aisément pour le cas de $\mu > 2$, la démonstration étant absolument la même. Pour énoncer ce théorème, je supposerai, pour fixer les idées, $\mu = 3$, $\rho = 7$, et j'imaginerai que le Tableau des périodes ait été écrit sous sa forme habituelle (A).

On aura

$$\tau_{17} = \tau_{27} = \tau_{37} = \tau_{16} = \tau_{26} = 0,$$
$$\tau_{36} = \nu_3, \quad \tau_{14} = \lambda_1 + \lambda_2\tau_{12} + \lambda_3\tau_{13},$$
$$\tau_{24} = \mu_1 + \lambda_2\tau_{22} + \lambda_3\tau_{23}, \quad \tau_{34} = \nu_1 + \lambda_2\tau_{23} + \lambda_3\tau_{33},$$
$$\tau_{15} = \lambda_4\tau_{13}, \quad \tau_{25} = \mu_2 + \lambda_4\tau_{23}, \quad \tau_{35} = \nu_2 + \lambda_4\tau_{33}.$$

les λ, les μ et les ν étant commensurables. Ce qu'il faut surtout retenir, c'est qu'on peut choisir le système normal des périodes, de telle façon que les μ premières intégrales *normales* (*Cf.* Clebsch et Gordan, *Abelsche Functionen*, p. 107), qui correspondent à ce système soient précisément μ des intégrales réductibles.

Dans ces μ intégrales normales, les périodes de rang $2\mu+2$, $2\mu+4$, $2\mu+6$, ..., $2\rho-2$, 2ρ sont nulles; de plus il y a des relations linéaires à coefficients entiers :

1° Entre les périodes de rang $2\mu+1$, 2, 4, 6, ..., 2μ, 3, 5, 7, ..., $2\mu-1$;

2° Entre les périodes de rang $2\mu+3$, 4, 6, ..., 2μ, 5, 7, ..., $2\mu-1$.

3° Entre les périodes de rang $2\mu+5$, 6, 8, ..., 2μ, 7, 9, ..., $2\mu-1$;

....

$\mu-1$° Entre les périodes de rang $4\mu-3$, $2\mu-2$, 2μ et $2\mu-1$;

μ° Entre les périodes de rang $4\mu-1$ et 2μ.

J'ai conservé pour les rangs des périodes le même mode de désignation que j'ai employé dans tout ce travail, de telle façon que la période de rang 2λ occupe la $\lambda^{\text{ième}}$ colonne dans le tableau (A), pendant que la période de rang $2\lambda - 1$ y occupe la $(\rho + \lambda)^{\text{ième}}$ colonne.

Ainsi se trouve généralisé le second théorème de M. Weierstrass, dont il est inutile de faire ressortir l'analogie avec l'un des plus beaux résultats de M. Picard.

8. La démonstration qui fait l'objet du paragraphe précédent peut se présenter sous une forme un peu différente.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_{2\rho}$ un système de périodes normales de nos ρ intégrales abéliennes, et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2\mu}$ un système primitif quelconque de périodes des μ intégrales réduites.

On aura, pour une quelconque des intégrales réductibles,

$$x_i = \Sigma_k \alpha_{ik} \xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, 2\rho;\ k = 1, 2, \ldots, 2\mu),$$

les α étant des coefficients entiers.

Appliquons à nos périodes les substitutions (11) et (12), de façon que le nouveau système soit encore normal.

1° Appliquons à toutes les paires de périodes la substitution (11), de façon à faire disparaître $\alpha_{2,1}, \alpha_{4,1}, \ldots, \alpha_{2\rho,1}$.

2° Appliquons ensuite aux deux dernières paires la substitution (12), de façon à faire disparaître $\alpha_{2\rho-1,1}$, puis aux paires de rang $\rho - 2$ et $\rho - 1$, cette même substitution, de façon à faire disparaître $\alpha_{2\rho-3,1}$, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les $\alpha_{i,1}$ aient disparu, excepté $\alpha_{1,1}$.

3° Appliquons ensuite à toutes les paires de périodes, excepté à la première, la substitution (11), pour faire disparaître $\alpha_{4,2}$, $\alpha_{6,2}, \ldots, \alpha_{2\rho,2}$.

4° Appliquons ensuite la substitution (12) aux deux dernières paires pour annuler $\alpha_{2\rho-1,2}$, puis aux paires de rang $\rho - 2$ et $\rho - 1$ pour annuler $a_{2\rho-3,2}$, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les $\alpha_{i,2}$ aient disparu, excepté $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$ et $\alpha_{3,2}$.

5° Appliquons la substitution (11) à toutes les paires, sauf aux deux premières, de façon à annuler $\alpha_{6,3}, \alpha_{8,3}, \ldots, \alpha_{2\rho,3}$.

6° Faisons ensuite disparaître à l'aide de la substitution (12), tous les $\alpha_{i,3}$, excepté $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{4,3}$ et $\alpha_{5,3}$.

En continuant de la sorte, on arrivera à avoir

$$\alpha_{i,k} = 0, \quad i > 2k - 1. \tag{13}$$

Cela fait, nous allons chercher à faire disparaître les coefficients $\alpha_{i,k}$ où l'indice i est pair et plus grand que 2μ, il reste $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ coefficients qui ne sont pas encore nuls et qu'il faut annuler; mais cela ne pourra se faire qu'en faisant reparaître quelques-uns des coefficients qui avaient disparu dans les simplifications précédentes. Il faut s'arranger pour que les coefficients α_{ik} qui reparaîtront ainsi aient tous l'indice i impair. Pour cela, il faut que les périodes ξ aient été choisies convenablement, comme on va le voir.

Le choix des périodes ξ est resté jusqu'ici entièrement arbitraire. Mais il est clair que nous aurions pu remplacer les ξ par tout autre système équivalent, rien de ce qui précède n'en aurait été changé. Nous pouvons donc supposer que le choix des périodes ξ ait été fait avant la réduction, de la façon la plus convenable pour notre objet.

Voici comment nous pouvons supposer que ce choix a été fait.

Considérons les $\frac{2\mu(2\mu-1)}{2}$ formes bilinéaires

$$\Phi_{pq} = \Sigma_k(\alpha_{2k-1,p}\alpha_{2k,q} - \alpha_{2k,p}\alpha_{2k-1,q}) \quad (k = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Les substitutions (11) et (12) changent ces formes en elles-mêmes.

Il reste à voir ce qui arrive quand on remplace le système des ξ par un système équivalent.

Posons

$$\xi_p = \Sigma\beta_{pr}\xi'_r$$

avec

$$x_i = \Sigma\alpha'_{ik}\xi'_k,$$

il viendra

$$\alpha'_{ir} = \Sigma_p\beta_{pr}\alpha_{ip}.$$

Nos formes Φ seront devenues

$$\Phi'_{rs} = \Sigma(\alpha'_{2k-1,r}\alpha'_{2k,s} - \alpha'_{2k,r}\alpha'_{2k-1,s})$$

ou

$$\Phi'_{rs} = \Sigma(\beta_{pr}\beta_{qs} - \beta_{ps}\beta_{qr})\Phi_{pq}.$$

Supposons, en particulier, que la substitution qui fait passer des ξ aux ξ' ne porte que sur les $2\mu - 1$ derniers ξ, de telle sorte que

$$\beta_{1,1} = 1, \quad \beta_{1,k} = \beta_{k,1} = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots, 2\mu).$$

Il viendra

$$\Phi'_{1,s} = \Sigma\beta_{q,s}\Phi_{1,q}.$$

On pourra donc toujours choisir les β de telle façon que

$$\Phi'_{1,s} = 0 \quad (s = 2, 3, \ldots, 2\mu - 1).$$

En conséquence, on peut toujours supposer que les ξ aient été choisis de telle sorte que tous les $\Phi_{1,q}$ soient nuls, excepté $\Phi_{1,2\mu}$. De plus, cette propriété ne sera pas altérée par une substitution linéaire ne portant que sur

$$\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{2\mu-1}.$$

En raisonnant de la même façon, on verrait qu'on peut trouver une substitution linéaire ne portant que sur $\xi_3, \xi_4, \ldots, \xi_{2\mu-1}$, et telle que

$$\Phi'_{2,s} = 0 \quad (s = 3, 4, \ldots, 2\mu - 2).$$

On peut donc toujours supposer que tous les $\Phi_{1,q}$ et les $\Phi_{2,q}$ sont nuls, sauf $\Phi_{1,2\mu}$, $\Phi_{2,2\mu}$, $\Phi_{2,2\mu-1}$. De plus, cette propriété n'est pas altérée par une substitution linéaire ne portant que sur

$$\xi_3, \xi_4, \ldots, \xi_{2\mu-2}.$$

En continuant le même raisonnement, on verrait que l'on peut supposer que $\Phi_{p,q}$ est nul, toutes les fois que

$$p + q < 2\mu + 1.$$

J'aurais même pu, si cela avait été utile pour mon objet, montrer que l'on peut choisir les ξ de telle façon que les $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ formes $\Phi_{p,q}$ s'annulent, à l'exception de μ d'entre elles.

En effet, soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2\mu}$ les périodes d'une de nos μ intégrales, à l'aide desquelles s'expriment les périodes normales x_1, $x_2, \ldots, x_{2p}$ de cette même intégrale; soient, pour une seconde intégrale, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2\mu}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{2p}$ les périodes correspondantes aux ξ et aux x. On aura

$$\Sigma(x_{2k-1}y_{2k} - x_{2k}y_{2k-1}) = \Sigma\Phi_{pq}(\xi_p\eta_q - \xi_q\eta_p).$$

Or on aura pu toujours choisir les ξ de telle façon que la forme bilinéaire du second membre soit *réduite*, et n'ait par conséquent que μ termes. Je supposerai que les μ termes qui ne s'annulent pas sont ceux qui ont pour coefficients

$$\Phi_{1,2\mu},\quad \Phi_{2,2\mu-1},\quad \Phi_{3,2\mu-2},\quad \ldots,\quad \Phi_{\mu,\mu+1}.$$

De plus, aucun de ces termes ne s'annulera, sans quoi l'invariant de notre forme bilinéaire serait nul; ce qui est impossible (*Cf. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCVII; Picard et Poincaré, Note du 3 décembre 1883).

On aura donc

$$(14)\qquad \begin{cases} \Phi_{p,q}=0 & \text{si} \quad p+q \gtrless 2\mu+1, \\ \Phi_{p,q} \gtrless 0 & \text{si} \quad p+q=2\mu+1. \end{cases}$$

Les substitutions (11) et (12) n'altérant pas les formes Φ_{pq}, ces conditions subsisteront quand j'aurai annulé à l'aide de ces substitutions tous les α_{ik}, où $i > 2k-1$. Mais les conditions (13) et (14) entraînent les suivantes :

$$\alpha_{2h,k}=0 \quad \text{si} \quad h+k < 2\mu+1.$$

Nous avons donc fait disparaître tous les α_{ik} lorsque l'indice i est plus grand que $2k-1$, ou lorsque, étant pair, il est plus petit que $4\mu+2-k$. Cela posé, nous allons faire disparaître le coefficient $\alpha_{2\mu+2,\mu+2}$, en appliquant la substitution (12) aux $(\mu+1)^{\text{ième}}$ et $(\mu-1)^{\text{ième}}$ paires, puis le cœfficient $\alpha_{2\mu+2,\mu+3}$ en appliquant la substitution (12) aux $(\mu+1)^{\text{ième}}$ et $(\mu-2)^{\text{ième}}$ paire, puis le coefficient $\alpha_{2\mu+2,\mu+4}$ en opérant de même sur les $(\mu+1)^{\text{ième}}$ et $(\mu-3)^{\text{ième}}$ paires, ..., puis enfin le coefficient $\alpha_{2\mu+2,2\mu}$, en opérant sur les $(\mu+1)^{\text{ième}}$ et première paires.

On aura alors

$$\alpha_{2\mu+2,k}=0,$$

quel que soit k.

On opérera de la même façon sur les $(\mu+2)^{\text{ième}}$ et $(\mu-2)^{\text{ième}}$ paires pour faire disparaître $\alpha_{2\mu+4,\mu+3}$, puis sur les $(\mu+2)^{\text{ième}}$ et $(\mu-3)^{\text{ième}}$ paires pour annuler $\alpha_{2\mu+4,\mu+4}$, ...; puis sur les $(\mu+2)^{\text{ième}}$ et première paires pour annuler $\alpha_{2\mu+4,2\mu}$. On aura alors

$$\alpha_{2\mu+4,k}=0,$$

quel que soit k.

On n'a qu'à continuer de la sorte pour avoir enfin

$$\alpha_{2h,k} = 0 \quad (h = \mu + 1,\ \mu + 2,\ \ldots,\ \rho;\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2\mu).$$

Il est clair en effet qu'en opérant dans l'ordre que je viens d'indiquer, on pourra faire reparaître des coefficients α_{ik} que l'on aura fait disparaître antérieurement, mais *seulement si l'indice i est impair;* on n'aura pas à craindre de faire reparaître des coefficients α_{ik} dont le premier indice sera impair.

Il résulte de là qu'après toutes ces transformations les périodes paires des $\rho - \mu$ dernières paires seront nulles dans nos μ intégrales réductibles. Mais ces μ intégrales ont été jusqu'ici choisies arbitrairement. On peut toujours les remplacer par μ quelconques de leurs combinaisons linéaires. Or le choix de ces combinaisons linéaires peut être fait de telle façon que, dans la première d'entre elles, la période de rang 2 soit égale à 1, et les périodes de rang 4, 6, 8, ..., 2μ égales à zéro; que dans la deuxième d'entre elles la période de rang 4 soit égale à 1 et les périodes de rang 2, 6, 8, ..., 2μ égales à zéro, ...; qu'enfin dans la $\mu^{\text{ième}}$ d'entre elles la période de rang 2μ soit égale à 1, et les périodes de rang 2, 4, 6, ..., $2\mu - 2$ égales à zéro.

Par conséquent, si nos μ intégrales sont choisies de la sorte, toutes les périodes de rang pair seront nulles dans chacune d'elles, excepté une qui sera égale à 1. *Ce seront donc des intégrales normales.* C. Q. F. D.

Ainsi se trouve démontré, par des méthodes purement arithmétiques, ce théorème si utile dans la théorie des fonctions abéliennes, ce qui prouve une fois de plus que l'analyste ne saurait se passer du secours de la théorie des nombres.