BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE D'OCAGNE

Sur la droite moyenne d'un système de droites quelconques situées dans un plan

Bulletin de la S. M. F., tome 12 (1884), p. 114-123
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1884__12__114_1>

Sur la droite moyenne d'un système de droites quelconques situées dans un plan; par M. Maurice d'Ocagne

(Séance du 18 juillet 1884.)

1. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_p$, p droites quelconques données dans un plan; supposons qu'une droite se déplace dans ce plan en restant parallèle à une direction fixe Δ, et coupe à chaque instant les p droites données en des points que nous désignerons par a_1, $a_2, \ldots, a_p$; le centre des moyennes distances g des points a_1, $a_2, \ldots, a_p$ décrit une droite G.

Nous dirons que *la droite* G *est la droite moyenne des droites* $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *relativement à la direction* Δ.

Si les droites $A_1, A_2, \ldots, A_p$ passent par un même point O, on voit, en menant par le point O une droite D parallèle à la direction Δ, que *la droite* G *est conjuguée harmonique de la droite* D *par rapport aux droites* $A_1, A_2, \ldots, A_p$, c'est-à-dire que si une droite quelconque coupe la droite G au point g, la droite D au point d, et les droites $A_1, A_2, \ldots, A_p$ aux points $a_1, a_2, \ldots$, a_p, *le point g est le centre des moyennes harmoniques du point d par rapport aux points* $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

2. Soit A_i l'une quelconque des droites du système. Nous prendrons l'équation de cette droite sous la forme

$$y - m_i x - n_i = 0,$$

et nous poserons $y - m_i x - n_i = A_i$, en sorte que les équations des diverses droites considérées seront

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad \ldots, \quad A_p = 0.$$

Cherchons l'équation de la droite moyenne du système relativement à la direction Δ, définie par le coefficient angulaire μ.

Si nous coupons la droite

$$y - m_i x - n_i = 0$$

par la droite

$$y - \mu x - \nu = 0,$$

nous avons pour coordonnées du point de rencontre a_i,

$$x_i = \frac{\nu - n_i}{m_i - \mu}, \quad y_i = \frac{m_i \nu - \mu n_i}{m_i - \mu}.$$

Les coordonnées du centre g des moyennes distances des points $a_1, a_2, \ldots, a_p$ seront donc données par

$$px = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\nu - n_i}{m_i - \mu} = \nu \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{m_i - \mu} - \sum_{i=1}^{i=p} \frac{n_i}{m_i - \mu}$$

et

$$py = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{m_i \nu - \mu n_i}{m_i - \mu} = \nu \sum_{i=1}^{i=p} \frac{m_i}{m_i - \mu} - \mu \sum_{i=1}^{i=p} \frac{n_i}{m_i - \mu}.$$

L'équation de la droite moyenne G, obtenue par l'élimination du paramètre ν entre les deux équations précédentes, sera, par suite,

$$py \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{m_i - \mu} - px \sum_{i=1}^{i=p} \frac{m_i}{m_i - \mu} = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{n_i}{m_i - \mu} \left(\sum_{i=1}^{i=p} \frac{m_i}{m_i - \mu} - \mu \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{m_i - \mu} \right);$$

mais observons que

$$\sum_{i=1}^{i=p} \frac{m_i}{m_i - \mu} - \mu \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{m_i - \mu} = p;$$

l'équation deviendra donc, après division par p,

$$y \sum_{i=1}^{i=p} \frac{1}{m_i - \mu} - x \sum_{i=1}^{i=p} \frac{m_i}{m_i - \mu} - \sum_{i=1}^{i=p} \frac{n_i}{m_i - \mu} = 0$$

ou

(1) $$\sum_{i=1}^{i=p} \frac{A_i}{m_i - \mu} = 0.$$

Donc :

Règle. — *Pour avoir l'équation de la droite moyenne d'un système de droites relativement à une direction* Δ *donnée, il faut :*

1° *Mettre les équations de ces droites sous la forme*

$$y - mx - n = 0;$$

2° *Diviser chacune de ces équations par l'excès du coefficient angulaire correspondant, sur le coefficient angulaire de la direction* Δ;

3° *Faire la somme des équations ainsi préparées.*

3. Remarquons que, si toutes les droites données sont parallèles, l'équation (1) se réduit à

(1') $$\sum_{i=1}^{i=p} A_i = 0.$$

4. L'équation (1) met en évidence ce fait, à savoir que *la droite moyenne de* p *droites relativement à une direction* Δ *coupe chacune de ces droites au même point que la droite moyenne des* $p-1$ *autres droites relativement à la même direction* Δ.

5. Comme application de cette remarque, déterminons la droite moyenne des trois côtés d'un triangle ABC relativement à une direction Δ donnée.

Menons à la direction Δ une parallèle quelconque qui coupe le côté AB au point C', le côté AC au point B', et le côté BC au point A'. Soient respectivement α, β, γ les milieux des segments B'C', A'C', A'B'; les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont respectivement les droites moyennes des systèmes de droites (AB, AC), (BC, BA), (CA, CB), relativement à la direction Δ. Donc, d'après la remarque précédente, si a est le point de rencontre de $A\alpha$ et de BC, b celui de $B\beta$ et de AC, c celui de $C\gamma$ et de AB, les points a, b, c

sont en ligne droite, et la droite abc est la droite moyenne des trois côtés du triangle ABC, relativement à la direction Δ.

6. Une autre conséquence de l'équation (1), c'est que *la droite moyenne d'un système de droites relativement à la direction de l'une quelconque d'entre elles se confond avec cette droite elle-même;* il est bien facile de se rendre compte de ce fait géométriquement.

7. Si l'on considère un système de droites fixes $A_1, A_2, \ldots, A_p$, à chaque direction Δ correspondra une droite moyenne G. On peut chercher à se rendre compte de la façon dont ces droites moyennes sont distribuées dans le plan, ou, en d'autres termes, à déterminer l'enveloppe de la droite G, lorsqu'on fait varier la direction Δ.

L'équation de cette enveloppe s'obtient par l'élimination de μ entre les équations

$$\sum_{i=1}^{i=p} \frac{A_i}{m_i - \mu} = 0 \tag{1}$$

et

$$\sum_{i=1}^{i=p} \frac{A_i}{(m_i - \mu)^2} = 0. \tag{2}$$

Posons

$$F(\mu) = (m_1 - \mu)(m_2 - \mu)\ldots(m_p - \mu)$$

et

$$F_{hk}(\mu) = \frac{F(\mu)}{(m_h - \mu)(m_k - \mu)}.$$

$F(\mu)$ et $F_{hk}(\mu)$ sont des fonctions entières de μ; la première de degré p, la seconde de degré $p - 2$.

Employant la notation connue $a_1 b_2 - a_2 b_1 = [a_1 b_2]$, nous poserons encore

$$\begin{aligned}\varphi(\mu, a, b) = {} & [a_1 b_2](m_1 - m_2)\big(F_{12}(\mu)\big)^2 + [a_1 b_3](m_1 - m_3)\big(F_{13}(\mu)\big)^2 + \ldots \\ & + [a_1 b_p](m_1 - m_p)\big(F_{1p}(\mu)\big)^2 + [a_2 b_3](m_2 - m_3)\big(F_{23}(\mu)\big)^2 + \ldots \\ & + [a_2 b_p](m_2 - m_p)\big(F_{2p}(\mu)\big)^2 + \ldots \\ & + [a_{p-1} b_p](m_{p-1} - m_p)\big(F_{p-1\,p}(\mu)\big)^2.\end{aligned}$$

On voit, par des calculs un peu longs, mais qui n'offrent aucune difficulté, que des équations (1) et (2) résultent pour x et y les valeurs

$$x = \frac{\varphi(\mu, 1, n)}{\varphi(\mu, m, 1)}, \tag{3}$$

$$y = \frac{\varphi(\mu, m, n)}{\varphi(\mu, m, 1)}. \tag{4}$$

Les équations (3) et (4), qui peuvent être prises pour équations de l'enveloppe cherchée, définissent une courbe unicursale de l'ordre $2(p-2)$.

8. Cette courbe est tangente aux p droites $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Cherchons le point où elle touche l'une quelconque de ces droites, A_1 par exemple.

A cet effet, éliminons $m_1 - \mu$ entre les équations (1) et (2). Il vient

$$\sum_{i=2}^{i=p} \frac{A_i(m_i - m_1)}{(m_i - \mu)^2} = 0. \tag{5}$$

Nous avons ainsi l'équation d'une droite passant par le point de contact de la droite moyenne considérée avec son enveloppe.

Pour $\mu = m_1$, la droite moyenne se confond avec la droite A_1 et l'équation (5) devient

$$\sum_{i=2}^{i=p} \frac{A_i}{(m_i - m_1)} = 0.$$

Cette équation définit la droite moyenne des droites $A_2, A_3, \ldots, A_p$ relativement à la direction de la droite A_1.

Or, cette droite coupe la droite A_1 au centre des moyennes distances des points où A_1 est coupée par les droites $A_2, A_3, \ldots, A_p$. Donc :

L'enveloppe de la droite moyenne d'un système de p droites est, en général, une courbe unicursale de l'ordre $2(p-2)$, tangente à chacune de ces droites au centre des moyennes distances des points où la droite considérée est coupée par les $p-1$ autres droites.

9. Si, en particulier, nous considérons la droite moyenne des

trois côtés d'un triangle, nous voyons, d'après le théorème précédent, que *cette droite a pour enveloppe la conique inscrite dans le triangle, et qui touche ses trois côtés en leurs milieux.*

On voit immédiatement que *cette conique a pour centre le centre de gravité du triangle.*

On trouve d'ailleurs, par des réductions faciles, que si

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0$$

sont les équations des trois côtés, mises sous la forme

$$y - mx - n = 0,$$

l'équation de cette conique peut s'écrire

$$\begin{aligned} &A_1^2(m_2 - m_3)^2 + A_2^2(m_3 - m_1)^2 + A_3^2(m_1 - m_2)^2 \\ &\quad + 2A_1A_2(m_3 - m_1)(m_3 - m_2) + 2A_2A_3(m_1 - m_2)(m_1 - m_3) \\ &\qquad + 2A_3A_1(m_2 - m_3)(m_2 - m_1) = 0. \end{aligned}$$

10. Nous développons, dans un Mémoire qui va paraître prochainement dans les *Nouvelles Annales,* une méthode de transformation géométrique qui permet, entre autres applications, d'établir un très grand nombre de propriétés des droites moyennes. Toutes les propositions qui suivent ont été obtenues par l'emploi de cette méthode.

11. Soient données deux droites A_1 et A_2 et une direction Δ; coupons les droites A_1 et A_2 par une droite quelconque Ω rencontrant la droite A_1 au point a_1 et la droite A_2 au point a_2; menons par les points a_1 et a_2 des parallèles à la direction Δ; la première des droites ainsi menées coupe la droite A_2 au point a'_2, la seconde coupe la droite A_1 au point a'_1; joignons les points a'_1 et a'_2 par une droite Ω'. On voit que les droites Ω et Ω' ont même droite moyenne par rapport à la direction Δ que les droites A_1 et A_2.

Nous exprimons d'une manière abrégée la construction précédente, un peu longue à énoncer, mais bien simple par le fait, en disant que *la droite* Ω' *est obtenue en retournant la droite* Ω, *suivant la direction* Δ, *entre les droites* A_1 *et* A_2.

Cela posé, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_p$, *p droites données dans un plan ; cou-*

pons ce système par une droite Ω *quelconque; retournons la droite* Ω *suivant une direction donnée* Δ *entre les droites* A_1 *et* A_2, *ce qui nous donne une droite* Ω_1; *retournons ensuite* Ω, *suivant* Δ, *entre* Ω_1 *et* A_3, *ce qui nous donne* Ω_2; *puis* Ω, *toujours suivant* Δ, *entre* Ω_2 *et* A_4, *ce qui nous donne* Ω_3, *et ainsi de suite; nous finirons par obtenir une droite* Ω_{p-1};

1° *Les droites* Ω_{p-1} *et* Ω *se coupent sur la droite moyenne* G *du système des droites* $A_1, A_2, \ldots, A_p$, *relativement à la direction* Δ;

2° *Si les droites* G, Ω *et* Ω_{p-1} *coupent respectivement aux points* g, ω *et* ω_{p-1} *une parallèle quelconque à la direction* Δ, *on a*

$$\frac{\omega g}{\omega\omega_{p-1}} = \frac{1}{p}.$$

De là résulte une construction de la droite moyenne d'un système de droites relativement à une direction donnée.

12. Soit G la droite moyenne des droites $A_1, A_2, \ldots, A_p$, relativement à la direction Δ. Si nous retournons la droite G, suivant la direction Δ, entre les droites A_1 et A_2, nous obtenons la droite B_2; de même, la droite G retournée, suivant la direction Δ, entre B_2 et A_3, donne la droite B_3; G retournée, toujours suivant Δ, entre B_3 et A_4, donne B_4; et ainsi de suite, jusqu'à une droite B_k quelconque. *Les droites* $B_k, A_{k+1}, \ldots, A_p$ *ont pour droite moyenne, relativement à la direction* Δ, *la même droite* G *que les droites* $A_1, A_2, \ldots, A_p$.

13. La droite moyenne joue un rôle intéressant dans certaines questions relatives aux coniques. En voici quelques exemples :

I. *Si un triangle se déplace en restant inscrit dans une conique* C *et circonscrit à une autre conique, la droite moyenne des trois côtés de ce triangle, relativement à l'une ou à l'autre des directions asymptotiques de la conique* C, *passe par un point fixe.*

II. *L'enveloppe de la droite moyenne, relativement à une direction fixe* Δ, *des côtés d'un polygone inscrit et circonscrit à deux coniques données, est une conique homologique de celle* *à laquelle le polygone reste circonscrit, le centre d'homologie étant à l'infini dans la direction* Δ [1].

III. Soient maintenant H et H′ deux hyperboles telles que les tangentes à ces hyperboles, parallèles à la droite qui joint leurs centres O et O′, soient les mêmes. Appelons H_1 et H'_1 les *hyperboles complémentaires* [2] de H et H′. Nous aurons ce théorème :

Si un polygone P, *d'un nombre quelconque de côtés, se meut en restant inscrit dans l'hyperbole* H_1 *et circonscrit à l'hyperbole* H'_1, *la droite moyenne, relativement à la direction* OO′, *des tangentes à l'hyperbole* H_1, *menées par les sommets du polygone* P, *passe par un point fixe* A *qui est le point de rencontre des diamètres de* H_1 *et de* H'_1, *conjugués de la direction* OO′.

De là ce corollaire :

Si l'on mène par le point A *une parallèle* D *à* OO′, *le point* A *est constamment le centre des moyennes distances des points où la droite* D *est coupée par les tangentes à l'hyperbole* H_1, *menées par les sommets du polygone* P.

14. Mais la notion de la droite moyenne intervient aussi, comme on va voir, dans des propriétés beaucoup plus générales des courbes. Exemples :

I. *Étant données une droite* D *et une courbe* C *de la classe* p, *si par chaque point de la droite* D *on tire les* p *tangentes que l'on peut mener de ce point à la courbe* C, *et que l'on prenne la droite moyenne de ces* p *tangentes relativement à la direction de la droite* D, *cette droite moyenne passe par un point fixe.*

---

(1) Je généralise ainsi ce théorème :

La polaire d'un point fixe A, *par rapport aux côtés d'un polygone inscrit et circonscrit à deux coniques données, enveloppe une conique homologique de celle à laquelle le polygone est circonscrit, le centre d'homologie étant confondu avec le point* A.

(2) Étant menées à une hyperbole deux tangentes parallèles, on forme le parallélogramme qui a pour diagonales les asymptotes, et ces deux tangentes pour côtés; les deux autres côtés de ce parallélogramme enveloppent une seconde hyperbole, qui a mêmes asymptotes que la première, et que nous appellerons sa *complémentaire*.

II. *Une droite qui se déplace, en restant parallèle à une direction fixe* Δ, *coupe à chaque instant une courbe d'ordre p en p points; la droite moyenne, relativement à la direction* Δ, *des tangentes en ces p points est fixe et se confond avec la droite moyenne des droites qui joignent deux à deux tous les points de contact de la courbe donnée et de ses tangentes parallèles à la direction* Δ.

III. Considérons deux courbes C_1 et C_2 et une direction Δ quelconque. Menons à chacune de ces courbes toutes les tangentes que l'on peut leur mener parallèlement à la direction Δ. Appelons (C_1) l'ensemble des points de contact ainsi déterminés sur C_1, (C_2) l'ensemble de ceux qui sont déterminés sur (C_2).

Soient de plus (T) le système des tangentes communes aux courbes C_1 et C_2, (T_1) le système des tangentes que l'on peut mener de tous les points du système (C_2) à la courbe C_1, (T_2) le système des tangentes que l'on peut mener de tous les points du système (C_1) à la courbe C_2, (D) l'ensemble de toutes les droites qui joignent deux à deux les points du système (C_1) aux points du système (C_2). Nous aurons ce théorème :

Les systèmes de droites (T), (T_1), (T_2) *et* (D) *ont même droite moyenne relativement à la direction* Δ.

IV. Supposons données une courbe C et une direction Δ. Prenons sur la courbe C un point c, et soit T la tangente en ce point; par le point c menons à la direction Δ une parallèle et supposons que cette parallèle coupe au point γ une droite quelconque prise pour base d'une involution; au point γ correspondra dans cette involution un point γ'; par le point γ menons à Δ une parallèle qui coupe la tangente T au point c'; lorsque le point c décrira la courbe C, le point c' engendrera une courbe C'. Cela posé, nous aurons ce théorème :

Si une parallèle à la direction Δ *coupe la courbe* C *aux points* $c_1, c_2, \ldots, c_p$, *que* $T_1, T_2, \ldots, T_p$ (*formant le système* (T)) *soient les tangentes à cette courbe en ces points, que* $c'_1, c'_2, \ldots, c'_p$ *soient les points de* C' *correspondant à* $c_1, c_2, \ldots, c_p$, *que* $T'_1, T'_2, \ldots, T'_p$ (*formant le système* (T')) *soient les* *tangentes à* C' *aux points* c'_1, c'_2, ..., c'_p, *les systèmes* (T) *et* (T′) *ont même droite moyenne relativement à la direction* Δ.

15. La droite moyenne d'un système de droites par rapport à une direction donnée se confond avec la polaire, relativement à ce système de droites, du point situé à l'infini dans la direction donnée. Cette remarque conduit à une généralisation facile des propositions du numéro précédent; on obtient ainsi les théorèmes suivants :

I. *Étant donné un point* A, *une droite* D *passant par ce point et une courbe* C *de la classe* p, *si par chaque point de la droite* D, *on tire les* p *tangentes que l'on peut mener de ce point à la courbe* C, *la polaire du point* A *par rapport à ces* p *tangentes passe par un point fixe.*

II. *Une droite qui se déplace, en passant constamment par un point fixe* A, *coupe à chaque instant une courbe d'ordre* p *en* p *points; la polaire du point* A *par rapport aux tangentes en ces* p *points est fixe et se confond avec la polaire du point* A *par rapport aux droites qui joignent deux à deux tous les points de contact de la courbe donnée et des tangentes à cette courbe issues du point* A.

III. *La polaire d'un point* A *par rapport aux tangentes communes à deux courbes* C_1 *et* C_2 *se confond :* 1° *avec la polaire du point* A *par rapport aux droites qui joignent les points de contact des tangentes menées de* A *à* C_1 *aux points de contact des tangentes menées de* A *à* C_2 ; 2° *avec la polaire du point* A *par rapport aux tangentes à* C_1 *issues des points de contact des tangentes menées de* A *à* C_2; 3° *avec la polaire du point* A *par rapport aux tangentes à* C_2 *issues des points de contact des tangentes menées de* A *à* C_1.

La première partie de ce théorème III a déjà été donnée par M. Laguerre (*Bulletin de la Soc. math.*, t. III, p. 176).