L. LÉVY

Mémoire sur les surfaces développables formées par la réfraction d'un faisceau de rayons lumineux parallèles sur une courbe donnée

Bulletin de la S. M. F., tome 11 (1883), p. 186-199

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1883__11__186_1>

Mémoire sur les surfaces développables formées par la réfraction d'un faisceau de rayons lumineux parallèles sur une courbe donnée; par M. LUCIEN LÉVY.

(Séance du 2 novembre 1883.)

Le problème ([1]) que nous nous proposons de résoudre a pour objet de grouper les rayons réfractés de manière à former des surfaces développables.

Soient

M un point de la courbe donnée;
MT la tangente en ce point;
MN une normale;
MI le rayon incident qui est parallèle à une direction fixe;
MR le rayon réfracté dans le plan NMI.

On doit avoir

$$\sin NMI = n \sin NMR, \tag{1}$$

n étant l'indice de réfraction.

Je vais d'abord transformer cette relation.

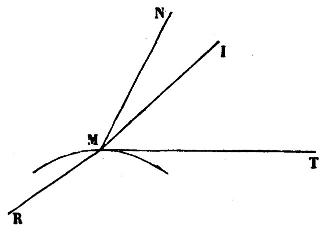
([1]) C'est à M. Ossian Bonnet qu'on doit la première idée de généraliser ainsi le problème des développées; mais l'éminent géomètre s'est contenté de signaler ce fait que le problème se résolvait par des quadratures, et n'a pas publié ses travaux sur ce sujet.

Appelons ω l'angle dièdre du plan NMI et du plan TMI; le trièdre MTIN donne la relation

$$\cos \mathrm{NMT} = 0 = \cos \mathrm{NMI} \cos \mathrm{TMI} + \sin \mathrm{NMI} \sin \mathrm{TMI} \cos \omega.$$

De même le trièdre MRIT donne

$$\cos \mathrm{RMT} = \cos \mathrm{RMI} \cos \mathrm{TMI} + \sin \mathrm{RMI} \sin \mathrm{TMI} \cos \omega;$$



d'où, en éliminant $\cos \omega$ entre les deux équations précédentes,

$$\begin{aligned} \cos \mathrm{RMT} \sin \mathrm{NMI} &= \cos \mathrm{TMI} (\cos \mathrm{RMI} \sin \mathrm{NMI} - \cos \mathrm{NMI} \sin \mathrm{RMI}) \\ &= - \cos \mathrm{TMI} \sin \mathrm{RMN} \end{aligned}$$

ou, en vertu de l'équation (1),

$$(2) \qquad \cos \mathrm{RMT} = -\frac{1}{n} \cos \mathrm{TMI}.$$

L'angle RMT ne dépend donc pas de la normale MN : il ne dépend que de l'arc de courbe s et des cosinus directeurs de la direction fixe. Nous poserons d'une manière générale

$$(3) \qquad \cos \mathrm{RMT} = \lambda,$$

λ étant une fonction donnée de s. Il suffira, pour revenir au problème proposé, de prendre

$$(4) \qquad \lambda = -\frac{1}{n} \cos \mathrm{TMI}.$$

Cela posé, appelons

a, b, c les cosinus des angles que fait la tangente MT avec trois axes de coordonnées rectangulaires;
a', b', c' les cosinus directeurs de la normale;
a'', b'', c'' ceux qui déterminent l'axe du plan osculateur;
x_0, y_0, z_0, les coordonnées du point M.

L'équation du plan osculateur de la courbe en M sera

$$a''(x-x_0)+b''(y-y_0)+c''(z-z_0)=0,$$

celle du plan mené par MT perpendiculairement au plan osculateur

$$a'(x-x_0)+b'(y-y_0)+c'(z-z_0)=0;$$

par conséquent, l'équation d'un plan qui fait avec le plan osculateur l'angle φ sera

$$\begin{aligned} &a''(x-x_0)+b''(y-y_0)+c''(z-z_0)\\ &\quad -\operatorname{tang}\varphi[a'(x-x_0)+b'(y-y_0)+c'(z-z_0)]=0. \end{aligned}$$

Nous poserons

$$(5) \qquad \operatorname{tang}\varphi = l.$$

Si l est fonction de s, le plan dont nous venons d'écrire l'équation enveloppera une surface, et cette surface sera une des développables que nous étudions si la caractéristique du plan fait avec la tangente MT un angle θ satisfaisant à l'équation (3), c'est-à-dire tel que

$$(6) \qquad \cos\theta = \lambda.$$

Les équations d'une parallèle à cette caractéristique seront

$$(a''-a'l)x+(b''-b'l)y+(c''-c'l)z=0,$$

$$\frac{\partial(a''-a'l)}{\partial s}x+\frac{\partial(b''-b'l)}{\partial s}y+\frac{\partial(c''-c'l)}{\partial s}z=0.$$

Nous les écrirons

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma},$$

en posant

$$\alpha=(b''-b'l)\frac{\partial(c''-c'l)}{\partial s}-(c''-c'l)\frac{\partial(b''-b'l)}{\partial s},$$

$$\beta=(c''-c'l)\frac{\partial(a''-a'l)}{\partial s}-(a''-a'l)\frac{\partial(c''-c'l)}{\partial s},$$

$$\gamma=(a''-a'l)\frac{\partial(b''-b'l)}{\partial s}-(b''-b'l)\frac{\partial(a''-a'l)}{\partial s}.$$

Pour calculer α, nous emploierons les formules de M. Serret

$$\frac{\partial c'}{\partial s} = -\frac{c}{R} - \frac{c''}{T},$$

$$\frac{\partial c''}{\partial s} = \frac{c'}{T},$$

R étant le rayon de courbure, T le rayon de torsion de la courbe au point M.

Il vient alors

$$\alpha = (b'' - b'l)\left(\frac{c'}{T} + l\frac{c}{R} + l\frac{c''}{T} - c'\frac{\partial l}{\partial s}\right)$$
$$- (c'' - c'l)\left(\frac{b'}{T} + l\frac{b}{R} + l\frac{b''}{T} - b'\frac{\partial l}{\partial s}\right)$$

ou

$$\alpha = \frac{b''c' - b'c''}{T} + \frac{b''c - bc''}{R}l - (b''c' - b'c'')\frac{\partial l}{\partial s}$$
$$- \frac{b'c - bc'}{R}l^2 - \frac{b'c'' - b''c'}{T}l^2,$$

ou, en vertu de relations bien connues entre les neuf cosinus,

$$\alpha = -a\frac{1 + l^2}{T} + a'\frac{l}{R} + a\frac{\partial l}{\partial s} + a''\frac{l^2}{R};$$

on aura de même

$$\beta = -b\frac{1 + l^2}{T} + b'\frac{l}{R} + b\frac{\partial l}{\partial s} + b''\frac{l^2}{R},$$

$$\gamma = -c\frac{1 + l^2}{T} + c'\frac{l}{R} + c\frac{\partial l}{\partial s} + c''\frac{l^2}{R};$$

or l'équation (6) peut s'écrire

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \lambda$$

ou

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 = \lambda^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Les formules précédentes donnent immédiatement

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \frac{\partial l}{\partial s} - \frac{1 + l^2}{T},$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \left(\frac{\partial l}{\partial s} - \frac{1 + l^2}{T}\right)^2 + \frac{l^2(1 + l^2)}{R^2}.$$

L'équation du problème est donc enfin

$$\left(\frac{\partial l}{\partial s} - \frac{1+l^2}{T}\right)^2 = \lambda^2 \left[\frac{l^2(1+l^2)}{R^2} + \left(\frac{\partial l}{\partial s} - \frac{1+l^2}{T}\right)^2\right]$$

ou

$$\frac{\partial l}{\partial s} - \frac{1+l^2}{T} = \frac{\mu}{R} l \sqrt{1+l^2}, \tag{7}$$

en posant

$$\mu = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}. \tag{8}$$

Remarquons pour les applications ultérieures que l'on a

$$\mu = \cot \widehat{RMT}. \tag{8 bis}$$

Faisons dans l'équation (7)

$$l = \frac{2t}{1+t^2}, \tag{9}$$

d'où

$$\frac{\partial l}{\partial s} = \frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2} \frac{\partial t}{\partial s},$$

$$1 + l^2 = \frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}.$$

Il vient, après une suppression du facteur $\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}$ dont il sera tenu compte ultérieurement,

$$\frac{\partial t}{\partial s} - \frac{1+t^2}{2T} - \frac{\mu}{R} t = 0. \tag{10}$$

Nous sommes ainsi ramenés à résoudre une équation de Riccati.

Jusqu'ici les axes de coordonnées et la fonction λ ou, ce qui revient au même, la fonction μ sont restés arbitraires. Revenant au problème primitif, nous prendrons, comme dans l'équation (4),

$$\lambda = -\frac{1}{n} \cos \widehat{TMI}.$$

De plus, l'axe des z sera parallèle aux rayons incidents, de sorte que nous aurons

$$\lambda = -\frac{c}{n},$$

$$\mu = -\frac{c}{\sqrt{n^2 - c^2}}.$$

Cela posé, on vérifie aisément que l'équation (10) admet les deux solutions suivantes :

$$t_1 = -\frac{c' + \sqrt{n^2 - c^2}}{c'' + \sqrt{1 - n^2}},$$

$$t_2 = -\frac{c' + \sqrt{n^2 - c^2}}{c'' - \sqrt{1 - n^2}}.$$

En effet, on a

$$\frac{\partial t_1}{\partial s} = -\frac{\left(\dfrac{\partial c'}{\partial s} - \dfrac{c\dfrac{\partial c}{\partial s}}{\sqrt{n^2 - c^2}}\right)\left(c'' + \sqrt{1 - n^2}\right) - \dfrac{\partial c''}{\partial s}\left(\sqrt{n^2 - c^2} + c'\right)}{\left(c'' + \sqrt{1 - n^2}\right)^2};$$

or les formules de M. Serret donnent

$$\frac{\partial c}{\partial s} = \frac{c'}{R},$$

$$\frac{\partial c'}{\partial s} = -\frac{c}{R} - \frac{c''}{T},$$

$$\frac{\partial c''}{\partial s} = \frac{c'}{T};$$

donc

$$\frac{\partial t_1}{\partial s} = \frac{\left(\dfrac{c}{R} + \dfrac{c''}{T} + \dfrac{cc'}{R\sqrt{n^2 - c^2}}\right)\left(c'' + \sqrt{1 - n^2}\right) + \dfrac{c'}{T}\left(\sqrt{n^2 - c^2} + c'\right)}{\left(c'' + \sqrt{1 - n^2}\right)^2}.$$

En portant dans l'équation (10) cette valeur ainsi que celles de μ et de t_1, puis chassant le dénominateur $\left(c'' + \sqrt{1 - n^2}\right)^2$, il vient

$$\frac{cc''}{R} + \frac{c''^2}{T} + \frac{cc'c''}{R\sqrt{n^2 - c^2}} + \frac{c\sqrt{1 - n^2}}{R} + \frac{c''\sqrt{1 - n^2}}{T} + \frac{cc'\sqrt{1 - n^2}}{R\sqrt{n^2 - c^2}} + \frac{c'\sqrt{n^2 - c^2}}{T} + \frac{c'^2}{T}$$

$$- \frac{c''^2}{2T} - \frac{c''\sqrt{1 - n^2}}{T} - \frac{1 - n^2}{2T} - \frac{c'^2}{2T} - \frac{c'\sqrt{n^2 - c^2}}{2T} - \frac{n^2 - c^2}{2T}$$

$$+ \frac{c}{R\sqrt{n^2 - c^2}}\left(-c'c'' - c''\sqrt{n^2 - c^2} - c'\sqrt{1 - n^2} - \sqrt{1 - n^2}\sqrt{n^2 - c^2}\right),$$

et l'on voit que tous les termes se détruisent deux à deux. De même, en changeant $\sqrt{1 - n^2}$ en $-\sqrt{1 - n^2}$, on voit que t_2 est solution de l'équation (10).

Cela posé, effectuons dans l'équation (10) la substitution

$$\frac{t - t_1}{t - t_2} = u,$$

d'où

$$t = t_1 + \frac{u(t_1 - t_2)}{1 - u};$$

or

$$t_1 - t_2 = \frac{2(c' + \sqrt{n^2 - c^2})\sqrt{1 - n^2}}{c''^2 + n^2 - 1} = \frac{2\sqrt{1 - n^2}}{\sqrt{n^2 - c^2} - c'}.$$

Donc

$$t = t_1 + \frac{2u}{1 - u}\,\frac{\sqrt{1 - n^2}}{\sqrt{n^2 - c^2} - c'},$$

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{\partial t_1}{\partial s} + \frac{2\sqrt{1 - n^2}}{\sqrt{n^2 - c^2} - c'}\,\frac{\partial \dfrac{u}{1 - u}}{\partial s} - \frac{2u\sqrt{1 - n^2}}{1 - u}\,\frac{\dfrac{\partial(\sqrt{n^2 - c^2} - c')}{\partial s}}{(\sqrt{n^2 - c^2} - c')^2}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (10), en tenant compte de ce que t_1 est une solution : il vient

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{2\sqrt{1 - n^2}}{\sqrt{n^2 - c^2} - c'} \times \frac{\partial \dfrac{u}{1 - u}}{\partial s} - \frac{2u\sqrt{1 - n^2}}{1 - u}\,\frac{\dfrac{\partial(\sqrt{n^2 - c^2} - c')}{\partial s}}{(\sqrt{n^2 - c^2} - c')^2} \\ &\quad - \frac{1}{2\mathrm{T}}\left[\frac{4ut_1}{1 - u}\,\frac{\sqrt{1 - n^2}}{\sqrt{n^2 - c^2} - c'} + \frac{4u^2\sqrt{1 - n^2}}{(\sqrt{n^2 - c^2} - c')^2(1 - u)^2}\right] \\ &\qquad - \frac{\mu}{\mathrm{R}}\,\frac{2u}{1 - u}\,\frac{\sqrt{1 - n^2}}{\sqrt{n^2 - c^2} - c'} = 0. \end{aligned}\right.$$

Donnons à toutes les fractions le dénominateur $(1 - u)^2$ et écrivons seulement le coefficient de u^2

$$2\sqrt{1 - n^2}\,\frac{\partial(\sqrt{n^2 - c^2} - c')}{\partial s} + \frac{2t_1\sqrt{1 - n^2}(\sqrt{n^2 - c^2} - c')}{\mathrm{T}} - \frac{2\sqrt{1 - n^2}}{\mathrm{T}} + \frac{2\mu\sqrt{1 - n^2}(\sqrt{n^2 - c^2} - c')}{\mathrm{R}}.$$

Si l'on remplace dans l'expression précédente t_1 et μ par leurs valeurs, $\frac{\partial c}{\partial s}$ par $\frac{c'}{\mathrm{R}}$ et $\frac{\partial c'}{\partial s}$ par $-\frac{c}{\mathrm{R}} - \frac{c''}{\mathrm{T}}$, on voit qu'elle est identiquement nulle.

L'équation (11) peut donc s'écrire, en supprimant le facteur $\dfrac{2\sqrt{1-n^2}}{(\sqrt{n^2-c^2}-c')(1-u)^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial s}-\frac{t_1-t_2}{2T}u=0.$$

On tire de là

$$u=Ce^{\int\frac{t_1-t_2}{2T}ds},$$

C étant une constante arbitraire.

Nous avons donc enfin

$$\text{(12)}\qquad \frac{t-t_1}{t-t_2}=Ce^{\int\frac{t_1-t_2}{2T}ds}.$$

L'équation précédente ne contient plus qu'une seule quadrature à effectuer.

Le calcul que nous venons de faire repose sur ce que l'on connaît deux solutions de l'équation de Riccati : il est donc en défaut lorsque $t_1=t_2$, c'est-à-dire lorsque

$$n=1.$$

Dans ce cas, on ne connaît que la solution

$$t_1=-\frac{c'+\sqrt{1-c^2}}{c''}.$$

Je vais montrer que la résolution de l'équation de Riccati peut encore, dans ce cas, se ramener à une quadrature unique.

Faisons dans l'équation (10)

$$t=t_1+\frac{1}{u}.$$

Elle devient

$$\frac{\partial u}{\partial s}+\left(\frac{t_1}{T}+\frac{\mu}{R}\right)u+\frac{1}{2T}=0;$$

d'où l'on tire

$$u=e^{-\int\left(\frac{\mu}{R}+\frac{t_1}{T}\right)ds}\left[C-\frac{1}{2}\int e^{\int\left(\frac{\mu}{R}+\frac{t_1}{T}\right)ds}\times\frac{ds}{T}\right].$$

La quadrature $\int\left(\frac{\mu}{R}+\frac{t_1}{T}\right)ds$ peut être effectuée. En effet, remplaçons μ par $\dfrac{-c}{\sqrt{1-c^2}}$ et t_1 par $-\dfrac{c'+\sqrt{1-c^2}}{c''}=-\dfrac{c''}{\sqrt{1-c^2}-c'}$.

l'intégrale devient

$$\int\left(\frac{-c\,ds}{R\sqrt{1-c^2}}-\frac{\frac{c''\,ds}{T}}{\sqrt{1-c^2}-c'}\right);$$

or les formules de M. Serret donnent

$$\frac{c''\,ds}{T}=-\frac{c\,ds}{R}-dc'.$$

L'intégrale prend donc la forme

$$\int\left[\frac{-c\,ds}{R}\left(\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-c^2}-c'}\right)+\frac{dc'}{\sqrt{1-c^2}-c'}\right]$$

$$=\int\left(\frac{cc'\,ds}{R\sqrt{1-c^2}}+dc'\right)\frac{1}{\sqrt{1-c^2}-c'}=\int\frac{\frac{c\,dc}{\sqrt{1-c^2}}+dc'}{\sqrt{1-c^2}-c'}.$$

Cette dernière intégrale est égale à

$$-\log\left(\sqrt{1-c^2}-c'\right);$$

on a donc

$$u=\left(\sqrt{1-c^2}-c'\right)\left(C-\frac{1}{2}\int\frac{ds}{T}\,\frac{1}{\sqrt{1-c^2}-c'}\right).$$

Il ne reste plus, comme nous l'avons annoncé, qu'une quadrature à effectuer.

Le cas des courbes planes mérite une mention spéciale, parce que les variables se séparent immédiatement dans l'équation (10). Si, en effet, on fait dans cette équation $\frac{1}{T}=0$, elle devient

$$\frac{\partial t}{\partial s}-\frac{\mu}{R}\,t=0,$$

d'où

$$t=Ce^{\int\frac{\mu}{R}ds} \tag{13}$$

Si l'on pose $t=\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$, φ sera l'angle du plan de la courbe et du plan tangent à la développable.

Pour deux solutions différentes correspondant aux valeurs c'

et c'' de la constante, nous aurons

$$\frac{\tang \frac{\varphi'}{2}}{\tang \frac{\varphi''}{2}} = \frac{c'}{c''},$$

d'où cet énoncé :

Étant données deux surfaces développables répondant à la question et leurs plans tangents en un même point M *de la courbe réfringente, les tangentes trigonométriques des moitiés des angles que font ces plans tangents avec le plan de la courbe ont un rapport constant lorsque le point* M *parcourt la courbe réfringente.*

Exemple. — Supposons que la courbe donnée soit une circonférence de rayon R. En prenant pour axes deux diamètres rectangulaires de la circonférence et pour axe des z l'axe du cercle, nous aurons

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{R}\cos\omega, & dx &= -\mathrm{R}\sin\omega\, d\omega, \\ y &= \mathrm{R}\sin\omega, & dy &= \mathrm{R}\cos\omega\, d\omega, \\ & & ds &= \mathrm{R}\, d\omega. \end{aligned}$$

Il faut encore pour appliquer la formule (13), calculer c, c'est-à-dire le cosinus de l'angle que fait la tangente au cercle avec la direction des rayons incidents. Supposons que le plan des zx soit parallèle aux rayons incidents et que ceux-ci fassent avec l'axe Ox l'angle α, nous aurons

$$c = \cos\alpha \frac{\partial x}{\partial s} = -\cos\alpha \sin\omega,$$

$$\mu = -\frac{c}{\sqrt{n^2 - c^2}} = \frac{\cos\alpha \sin\omega}{\sqrt{n^2 - \cos^2\alpha \sin^2\omega}}$$

$$= \frac{\cos\alpha \sin\omega}{\sqrt{n^2 - \cos^2\alpha + \cos^2\alpha \cos^2\omega}},$$

$$\int \frac{\mu\, ds}{\mathrm{R}} = \int \frac{\cos\alpha \sin\omega\, d\omega}{\sqrt{n^2 - \cos^2\alpha + \cos^2\alpha \cos^2\omega}}$$

$$= -\log\left(\cos\alpha\cos\omega + \sqrt{n^2 - \cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\omega}\right).$$

Portant cette valeur dans l'équation (13), nous obtenons

$$t = \tang \frac{\varphi}{2} = \frac{c}{\cos\alpha\cos\omega + \sqrt{n^2 - \cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\omega}}.$$

Cette formule permettra d'étudier la variation de l'angle φ le long de la circonférence.

Remarque I. — Il nous reste à indiquer comment ont été obtenues les deux solutions particulières de l'équation (10). C'est M. Darboux qui m'a suggéré l'idée de cette intéressante application du théorème de Malus. On sait que les rayons réfractés seront normaux à une surface; les développables que nous venons d'étudier couperont donc cette surface suivant ses lignes de courbure. Nous allons déterminer deux lignes de courbure particulières; ce seront les sections de la surface par un plan P perpendiculaire aux rayons incidents.

Soient

IM un rayon incident;
I sa trace sur le plan P;
M le point où il rencontre la courbe réfringente;
MR un rayon réfracté.

Nous appellerons R le point où ce rayon perce la surface normale que nous étudions : Malus a démontré qu'on peut obtenir cette surface en prenant MR de telle sorte que

$$\text{MI} = n \times \text{MR}.$$

Cela posé pour tous les points R communs à la surface et au plan P, on aura la relation précédente, c'est-à-dire que la normale à la surface fait avec la normale au plan un angle constant : donc, d'après le théorème de Lancret, la section de la surface par le plan est une ligne de courbure. En prenant, au lieu de l'angle constant considéré ci-dessus, son supplément, on aura une deuxième ligne de courbure.

Remarque II. — Dans le cas où $n = 1$, les deux lignes de courbure considérées ci-dessus se confondent. La développable particulière qui nous a permis dans ce cas de réduire l'équation (10) est le cylindre qui a pour directrice la courbe donnée et pour génératrices des parallèles à la direction des rayons incidents.

Remarque III. — Tous les rayons réfractés au même point M de la courbe réfringente détermineront sur la surface normale une ligne de courbure circulaire, puisqu'il faudra porter sur chacun la même longueur $MR = \frac{1}{n} MI$. La surface normale aura donc un système de lignes de courbure circulaires. Cela posé, on sait que le rapport anharmonique de quatre solutions d'une équation de Riccati est constant : on aura donc, entre quatre solutions de l'équation (10), la relation

$$\frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} : \frac{t_4 - t_1}{t_4 - t_2} = \text{const.}$$

ou, en se rappelant la signification géométrique de la lettre $t = \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}$,

$$\frac{\sin \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}} : \frac{\sin \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{2}} = \text{const.}$$

Or les quatre plans tangents aux développables qui correspondent aux angles φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 passent par la tangente MT, c'est-à-dire par l'axe de la ligne de courbure circulaire : l'équation précédente exprime donc un théorème de Géométrie déjà connu, mais dont nous ne connaissons pas de démonstration aussi simple que la précédente, à savoir que : *Sur toute surface enveloppe de sphères, quatre lignes de courbure non circulaires prises à volonté déterminent sur les lignes de courbure circulaires quatre points dont le rapport anharmonique est constant.* La méthode que nous avons employée est d'ailleurs indépendante du problème particulier que nous avons en vue, puisque l'équation de Riccati a été obtenue en laissant la fonction λ entièrement arbitraire.

Généralisation du problème — Autres cas d'intégration de l'équation (10).

Nous reprendrons l'équation (7) et l'équation (10)

$$\frac{\partial l}{\partial s} - \frac{1 + l^2}{T} = \frac{\mu}{R} l \sqrt{1 + l^2}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial t}{\partial s} - \frac{t^2}{2T} - \frac{\mu}{R} t - \frac{1}{2T} = 0, \tag{10}$$

et nous chercherons s'il existe d'autres cas d'intégration. Mais remarquons d'abord que dans le passage de la première de ces équations à la deuxième nous avons supprimé un facteur $\frac{t^2+1}{t^2-1}$. $t=\sqrt{-1}$ ou, ce qui revient au même, $l=\sqrt{-1}$ est une solution singulière de l'équation (7). Ainsi, quelle que soit la loi suivant laquelle on fasse succéder des droites issues d'une courbe gauche donnée, on formera une surface développable en prenant celles qui sont dans les plans tangents au cercle imaginaire de l'infini, et alors toutes ces droites issues d'un même point de la courbe coïncideront entre elles et en particulier avec la normale à la courbe située dans le plan tangent considéré.

On voit ensuite que $t=1$ ou $l=\infty$ n'est solution qu'autant que $\mu=-\frac{R}{T}$; mais alors $t=1$ est aussi solution de l'équation (10) et la suppression du facteur $\frac{t^2+1}{t^2-1}$ n'a supprimé aucune solution.

L'équation (10) nous donnera immédiatement l'enveloppe des plans menés par la tangente qui font un angle constant φ avec le plan osculateur de la courbe. Dans ce cas, on a

$$\frac{\partial t}{\partial s}=0, \quad t=\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2},$$

d'où

$$\mu=-\frac{R}{T}\frac{t^2+1}{2t}=-\frac{R}{T\sin\varphi}$$

et, à cause de l'équation (8 *bis*),

$$(14) \qquad \operatorname{tang}\widehat{RMT}=-\sin\varphi\,\frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{T}}.$$

On a donc ce théorème :

Si l'on trace sur une surface développable une courbe dont les plans osculateurs fassent avec les plans tangents de la surface un angle constant, les tangentes à la courbe font avec les génératrices de la surface des angles dont la tangente trigonométrique a pour valeur le rapport de la courbure de la courbe à sa torsion multiplié par le sinus de l'angle constant.

Mais la réciproque de ce théorème n'est pas vraie. On voit seulement que l'équation (10) pourra encore être intégrée par une seule quadrature dans le cas où la loi de succession des rayons issus de la courbe sera celle indiquée (14). Supposons, en effet,

$$\mu = -\frac{R}{T \sin\varphi},$$

φ étant une constante.

L'équation (10) devient

$$\frac{\partial t}{\partial s} - \frac{t^2}{2T} + \frac{t}{T\sin\varphi} - \frac{1}{2T} = 0$$

ou

$$\frac{\partial t}{t^2 - \frac{2t}{\sin\varphi} + 1} = \frac{ds}{T}$$

ou

$$\frac{dt}{\left(t - \cot\frac{\varphi}{2}\right)\left(t - \quad \mathrm{ng}\,\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{ds}{2T},$$

d'où

$$\frac{t - \cot\frac{\varphi}{2}}{t - \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}} = Ce^{\cot\varphi\int\frac{ds}{T}}$$

Cette équation ne donnera $t = \text{const.}$ que si la constante C est nulle ou infinie.