BULLETIN DE LA S. M. F.

J. PEROTT

Sur le problème des fous

Bulletin de la S. M. F., tome 11 (1883), p. 173-186
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1883__11__173_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur le problème des fous; par M. Joseph Perott.

(Séance du 16 novembre 1883.)

Ce problème bien connu est le suivant :

Placer un nombre donné de fous sur l'échiquier, de manière qu'aucun fou ne puisse être pris par un autre.

C'est le nombre des solutions de ce problème que je me propose de rechercher.

I.

Tout le monde sait qu'un fou placé sur une case blanche ne peut en prendre un autre qui se trouve sur une case noire, et inversement; donc on peut considérer séparément les fous qui sont placés sur des cases noires et ceux qui se trouvent sur des cases blanches. Le problème principal peut être résolu, par conséquent, à l'aide du problème auxiliaire suivant :

Placer un nombre donné de fous sur les cases noires de l'échiquier, de manière qu'ils ne puissent se prendre mutuellement.

Mais, avant d'aborder ce problème, je me propose d'en traiter un autre qui pourra servir de lemme.

II.

Problème des tours sur un échiquier rectangulaire.

Traçons dans un plan vertical m lignes horizontales et n lignes verticales équidistantes; ces lignes, que nous désignerons sous le nom de *lignes fondamentales,* donneront mn points d'intersection, qui pourront être considérés comme étant les centres des cases d'un échiquier rectangulaire à mn cases. Le problème des tours consiste à placer un nombre donné de tours sur cet échiquier, de manière qu'aucune tour ne puisse être prise par un autre.

Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait $m \leqq n$, il est évident que le problème des tours n'est possible que dans le cas où le nombre des tours est inférieur ou égal à m. Nous désignerons l'échiquier à mn cases par A_3. Supposons maintenant qu'on partage l'échiquier A_3 en deux régions quelconques, que nous désignerons sous les noms d'*échiquiers* A_1 et A_2; je me propose de faire voir que si le problème des tours est résolu pour l'échiquier A_1, je veux dire pour tous les nombres des tours depuis 1 jusqu'à m, il est toujours possible de le résoudre pour l'échiquier A_2. Je désignerai, en général, par A^k le nombre des solutions du problème des k tours sur l'échiquier A. Cela étant ainsi, il est évident que les solutions du problème des k tours sur l'échiquier A_3 peuvent être distribuées en $k+1$ classes suivantes.

1° Toutes les k tours se trouvent sur l'échiquier A_1. Nous désignerons le nombre de ces solutions par A_1^k.

2° Il y a $k-1$ tours sur l'échiquier A_1 et 1 tour sur l'échiquier A_2. Soit $A_1^{k-1} A_2^1$ le nombre de ces solutions.

. . . .

. . . .

$s+1$. Il y a $k-s$ tours sur l'échiquier A_1 et s tours sur l'échiquier A_2. Soit $A_1^{k-s} A_2^s$ le nombre de ces solutions.

. . . .

. . . .

$k+1$. Toutes les k tours se trouvent sur l'échiquier A_2. Soit A_2^k le nombre de ces solutions.

On aura évidemment

$$A_1^k + A_1^{k-1} A_2^1 + \ldots + A_1^{k-s} A_2^s + \ldots + A_2^k = A_3^k.$$

Je suppose donc qu'on connaisse les nombres

$$A_1^1,\ A_1^2,\ A_1^3,\ \ldots,\ A_1^m,$$

et puis les nombres

$$A_1^{k-1} A_2^1,\ A_1^{k-2} A_2^2,\ \ldots,\ A_1^{k-s} A_2^s,\ \ldots,\ A_2^k,$$

et je me propose de faire voir comment on pourra déterminer les nombres

$$A_1^k A_2^1,\ A_1^{k-1} A_2^2, \ldots,\ A_1^{k-t+1} A_2^t,\ \ldots,\ A_2^{k+1}.$$

Prenons pour point de départ une solution quelconque du problème des k tours sur l'échiquier A_1, de manière que les tours se trouvent placées sur les points

$$a'_1,\ a''_1,\ \ldots,\ a_1^{(k)}.$$

Il y aura $n-k$ lignes et $m-k$ colonnes de libres, qui donneront $(m-k)(n-k)$ points d'intersection sur chacun desquels on pourra placer la $k+1^{\text{ième}}$ tour. On aura de cette manière, en prenant pour point de départ toutes les solutions du problème des k tours sur l'échiquier A_1, $(m-k)(n-k)A_1^k$ solutions du problème des $k+1$ tours sur l'échiquier A_3. Ces solutions appartiendront évidemment aux deux premières classes. De plus, les solutions de la première classe s'obtiennent de cette manière chacune $k+1$ fois; car si, en partant de la position

$$a'_1,\ a''_1,\ \ldots,\ a_1^{(k)},$$

on avait obtenu la position [2]

$$a'_1,\ a''_1,\ \ldots,\ a_1^{(k)},\ a_1^{(k+1)},$$

cette même position pourrait aussi s'obtenir en partant d'une autre combinaison quelconque de k lettres prises parmi les $k+1$ lettres précédentes. Les solutions de la deuxième classe ne s'obtiendront qu'une seule fois. On écrira, par conséquent,

$$(m-k)(n-k)A_1^k = (k+1)A_1^{k+1} + A_1^k A_2^1,$$

ce qui détermine $A_1^k A_2^1$.

Je suppose qu'on soit parvenu de cette manière à déterminer tous les nombres

$$A_1^k A_2^1,\ A_1^{k-1} A_2^2,\ \ldots,\ A_1^{k-t+2} A_2^{t-1},$$

---

[1] Il est inutile d'avertir qu'on suppose $k < m$, sans cela tous les nombres suivants seraient des zéros.

[2] Nous désignerons, en général, par a_1 un point de l'échiquier A_1, par a_2 un point de l'échiquier A_2, et enfin par a_3 un point de l'échiquier A_3.

et je veux montrer comment on pourra déterminer (¹)

$$A_1^{k-t+1} A_2^t.$$

Partons d'une solution de la $t^{\text{ième}}$ classe du problème des k tours sur l'échiquier A_3

$$a_2', a_2'', \ldots, a_1^{(k-t+1)}; \; a_2', a_2'', \ldots, a_2^{(t-1)};$$

il y aura $n - k$ lignes et $m - k$ colonnes de libres qui donneront $(m-k)(n-k)$ points d'intersection sur chacun desquels on pourra placer la $k + 1^{\text{ième}}$ tour. On obtient de cette manière, en partant de toutes les solutions de la $t^{\text{ième}}$ classe du problème des k tours sur l'échiquier A_3, $(m-k)(n-k) A_1^{k-t+1} A_2^{t-1}$ solutions du problème des $k+1$ tours sur l'échiquier A_3, qui appartiendront évidemment aux classes t et $t+1$. Mais on voit que les solutions de la classe t s'obtiendront chacune $k - t + 2$ fois et celles de la classe $t+1$, t fois, de sorte qu'on peut écrire

$$(m-k)(n-k) A_1^{k-t+1} A_2^{t-1} = (k-t+2) A_1^{k-t+2} A_2^{t-1} + t A_1^{k-t-1} A_2^t,$$

ce qui détermine $A_1^{k-t+1} A_2^t$. Cette formule de récursion permet d'obtenir tous les autres nombres, si l'on connaît les nombres suivants :

$$A_1^1, \; A_1^2, \; A_1^3, \; \ldots, \; A_1^m.$$

En effet, on a évidemment

$$A_2^1 = mn - A_1^1;$$

puis, en faisant $k = 1$, $t = 1, 2$, on obtient successivement les nombres

$$A_1^1, \; A_2^1, \; A_2^2,$$

et ainsi de suite. On obtient aussi de cette manière le nombre des solutions du problème des k tours sur l'échiquier A_3 ; mais il est plus facile de l'obtenir directement à l'aide de la formule

$$A_3^k = mn \frac{(m-1)(n-1)}{2} \frac{(m-2)(n-2)}{3} \cdots \frac{(m-k+1)(n-k+1)}{k}.$$

Il convient maintenant d'appliquer la théorie précédente à quelques exemples particuliers.

(¹) Je suppose qu'on ait $k + 1 \geqq t$; dans le cas contraire, il n'y aurait rien à chercher. Quand l'indice d'une lettre devient égal à zéro, cette lettre est à supprimer.

III.

Problème des tours sur l'échiquier carré à 4 cases.

On obtient directement, à l'aide de la formule que nous avons donnée, en y faisant $m = n = 2$ et $k = 1, 2$,

$$A_3^1 = 2^2 = 4,$$

$$A_3^2 = 2^2\,\frac{1 \cdot 1}{2} = 2,$$

ce qui veut dire que le problème d'une tour a quatre solutions sur l'échiquier carré à 4 cases, et que le problème des 2 tours n'admet que deux solutions.

IV.

Problème des tours sur l'échiquier carré à 16 cases.

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \times & \times & \cdot \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \cdot & \times & \times & \cdot \end{array}$$

Je partagerai cet échiquier, que je désignerai par A_3, en deux, dont un contiendra les points marqués d'une croix, et l'autre les autres points. Je désignerai ces échiquiers par A_2 et A_1 respectivement. L'échiquier A_1, considéré à part, n'est autre chose qu'un échiquier carré à 4 cases, et l'on aura, par conséquent,

$$A_1^1 = 4,$$
$$A_1^2 = 2,$$
$$A_1^3 = 0,$$
$$A_1^4 = 0;$$

ce qui nous permet de résoudre le problème des tours sur l'échiquier A_2. On a évidemment

$$A_2^1 = 16 - 4 = 12.$$

La formule récurrente deviendra, en y faisant $m = n = 4$,

$$(4-k)^2 A_1^{k-t+1} A_2^{t-1} = (k-t+2) A_1^{k-t+2} A_2^{t-1} + t A_1^{k-t+1} A_2^{t}.$$

Puis, en faisant successivement

$$k = 1,\ t = 1, 2;\quad k = 2,\ t = 1, 2, 3;\quad k = 3,\ t = 1, 2, 3, 4,$$

on obtient

$$
\begin{gathered}
9A_1^1 = 2A_1^2 + A_1^1 A_2^1,\\
36 = 4 + A_1^1 A_2^1,\\
A_1^1 A_2^1 = 32,\\
9A_2^1 = A_1^1 A_2^1 + 2A_2^2,\\
108 = 32 + 2A_2^2,\\
A_2^2 = 38,\\
4A_1^2 = 3A_1^3 + A_1^2 A_2^1,\\
8 = A_1^2 A_2^1,\\
4A_1^1 A_2^1 = 2A_1^2 A_2^1 + 2A_1^1 A_2^2,\\
128 = 16 + 2A_1^1 A_2^2,\\
A_1^1 A_2^2 = 56,\\
4A_2^2 = A_1 A_2^2 + 3A_2^3,\\
152 = 56 + 3A_2^3,\\
A_2^3 = 32,\\
A_1^3 A_2^1 = 0,\\
A_1^2 A_2^1 = 3A_1^3 A_2^1 + 2A_1^2 A_2^2,\\
8 = 2A_1^2 A_2^2,\\
A_1^2 A_2^2 = 4,\\
A_1^1 A_2^2 = 2A_1^2 A_2^2 + 3A_1^1 A_2^3,\\
56 = 8 + 3A_1^1 A_2^3,\\
A_1 A_2^3 = 16,\\
A_2^3 = A_1^1 A_2^3 + 4A_2^4,\\
32 = 16 + 4A_2^4,\\
A_2^4 = 4.
\end{gathered}
$$

On voit que le problème des tours, sur l'échiquier A_2 à 12 cases, défini précédemment, a 12, 38, 32 ou 4 solutions, selon que le nombre des tours est égal à 1, 2, 3 ou 4.

V.

Problème des tours sur l'échiquier carré à 36 cases.

$$
\begin{array}{cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \times & \times & \cdot & \cdot \\
\cdot & \times & \times & \times & \times & \cdot \\
\cdot & \times & \times & \times & \times & \cdot \\
\cdot & \cdot & \times & \times & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

Je désignerai cette fois-ci l'échiquier contenant les *croix* par A_1, l'échiquier contenant les *points* par A_2, et enfin l'échiquier entier par A_3.

L'échiquier A_1 est le même que celui que nous avons désigné dans le problème précédent par A_2, ce qui donne

$$
\begin{aligned}
A_1^1 &= 12, \\
A_1^2 &= 38, \\
A_1^3 &= 32, \\
A_1^4 &= 4;
\end{aligned}
$$

puis, on a évidemment

$$A_2^1 = 36 - 12 = 24.$$

La formule de récursion devient, en y faisant $m = n = 6$,

$$(6-k)^2 A_1^{k-t+1} A_2^{t-1} = (k-t+2) A_1^{k-t+2} A_2^{t-1} + t A_1^{k-t+1} A_2^{t}.$$

En faisant successivement

$$k=1,\ t=1,2;\quad k=2,\ t=1,2,3;\quad k=3,\ t=1,2,3,4;$$
$$k=4,\ t=1,2,3,4,5;\quad k=5,\ t=1,2,3,4,5,6,$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
25 A_1^1 &= 2 A_1^2 + A_1^1 A_2^1, \\
300 &= 76 + A_1^1 A_2^1,
\end{aligned}
$$

$$A_1^1 A_2^1 = 224,$$
$$25 A_2^1 = A_1^1 A_2^1 + 2 A_2^2,$$
$$600 = 224 + 2 A_2^2,$$
$$A_2^2 = 188,$$
$$16 A_1^2 = 3 A_1^3 + A_1^2 A_2^1,$$
$$608 = 96 + A_1^2 A_2^1,$$
$$A_1^2 A_2^1 = 512,$$
$$16 A_1^1 A_2^1 = 2 A_1^2 A_2^1 + 2 A_1^1 A_2^2,$$
$$3584 = 1024 + 2 A_1^1 A_2^2,$$
$$A_1^1 A_2^2 = 1280,$$
$$16 A_2^2 = A_1^1 A_2^2 + 3 A_2^3,$$
$$3008 = 1280 + 3 A_2^3,$$
$$A_2^3 = 576,$$
$$9 A_1^3 = 4 A_1^4 + A_1^3 A_2^1,$$
$$288 = 16 + A_1^3 A_2^1,$$
$$A_1^3 A_2^1 = 272,$$
$$9 A_1^2 A_2^1 = 3 A_1^3 A_2^1 + 2 A_1^2 A_2^2,$$
$$4608 = 816 + 2 A_1^2 A_2^2$$
$$A_1^2 A_2^2 = 1896,$$
$$9 A_1 A_2^2 = 2 A_1^2 A_2^2 + 3 A_1^1 A_2^3,$$
$$11520 = 3792 + 3 A_1^1 A_2^3,$$
$$A_1^1 A_2^3 = 2576,$$
$$9 A_2^3 = A_1^1 A_2^3 + 4 A_2^4,$$
$$5184 = 2576 + 4 A_2^4,$$
$$A_2^4 = 652,$$
$$4 A_1^4 = 5 A_1^5 + A_1^4 A_2^1,$$
$$16 = A_1^4 A_2^1,$$
$$A_1^4 A_2^1 = 16,$$
$$4 A_1^3 A_2^1 = 4 A_1^4 A_2^1 + 2 A_1^3 A_2^2,$$
$$1088 = 64 + 2 A_1^3 A_2^2,$$
$$A_1^3 A_2^2 = 512,$$
$$4 A_1^2 A_2^2 = 3 A_1^3 A_2^2 + 3 A_1^2 A_2^3,$$
$$7584 = 1536 + 3 A_1^2 A_2^3,$$
$$A_1^2 A_2^3 = 2016,$$
$$4 A_1^1 A_2^3 = 2 A_1^2 A_2^3 + 4 A_1^1 A_2^4,$$

$$10304 = 4032 + 4A_1^1 A_2^4,$$

$$A_1 A_2^4 = 1568,$$

$$4A_2^4 = A_1^1 A_2^4 + 5A_2^5,$$

$$2608 = 1568 + 5A_2^5,$$

$$A_2^5 = 208,$$

$$A_1^4 A_2^1 = 5A_1^5 A_2^1 + 2A_1^4 A_2^2,$$

$$16 = 2A_1^4 A_2^2,$$

$$A_1^4 A_2^1 = 8,$$

$$A_1^3 A_2^2 = 4A_1^4 A_2^2 + 3A_1^3 A_2^3,$$

$$512 = 32 + 3A_1^3 A_2^3,$$

$$A_1^3 A_2^3 = 160,$$

$$A_1^2 A_2^3 = 3A_1^3 A_2^3 + 4A_1^2 A_2^4,$$

$$2016 = 480 + 4A_1^2 A_2^4,$$

$$A_1^2 A_2^4 = 384,$$

$$A_1^2 A_2^4 = 2A_1^2 A_2^4 + 5A_1^1 A_2^5,$$

$$1568 = 768 + 5A_1^1 A_2^5,$$

$$A_1^1 A_2^5 = 160,$$

$$A_2^5 = A_1^1 A_2^5 + 6A_2^6,$$

$$208 = 160 + 6A_2^6,$$

$$A_2^6 = 8.$$

VI.

Problème des tours sur l'échiquier rectangulaire à 56 cases.

·	·	·	×	·	·	·
·	·	×	×	×	·	·
·	×	×	×	×	×	·
×	×	×	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×
·	×	×	×	×	×	·
·	·	×	×	×	·	·
·	·	·	×	·	·	·

Je désignerai par A_1 l'échiquier qui contient les points, par A_2 l'échiquier qui contient les croix et par A_3 l'échiquier entier. L'échiquier A_1 est évidemment équivalent au point de vue du problème des tours à l'échiquier A_2 du problème précédent; quelques lignes sont plus éloignées les unes des autres dans le nouvel échiquier qu'elles ne l'étaient dans l'ancien; mais les points qui étaient sur une même ligne fondamentale le sont encore. Nous pouvons écrire, par conséquent,

$$\begin{aligned} A_1^1 &= 24, \\ A_1^2 &= 188, \\ A_1^3 &= 576, \\ A_1^4 &= 652, \\ A_1^5 &= 208, \\ A_1^6 &= 8, \\ A_1^7 &= 0. \end{aligned}$$

De plus, on a évidemment

$$A_2^1 = 56 - 24 = 32.$$

La formule de récursion devient, en faisant $m = 7$, $n = 8$,

$$(7-k)(8-k)A_1^{k-t+1}A_2^{t-1} = (k-t+2)A_1^{k-t+2}A_2^{t-1} + tA_1^{k-t+1}A_2^t;$$

puis, en faisant successivement,

$$k = 1,\ t = 1, 2;\quad k = 2,\ t = 1, 2, 3;\quad k = 3,\ t = 1, 2, 3, 4;$$
$$k = 4,\ t = 1, 2, 3, 4, 5;\quad k = 5,\ t = 1, 2, 3, 4, 5, 6;$$
$$k = 6,\ t = 1, 2, 3, 4, 5, 7,$$

on obtient

$$\begin{aligned} 42A_1^1 &= 2A_1^2 + A_1^1A_2^1, \\ 1008 &= 376 + A_1^1A_2^1, \\ A_1^1A_2^1 &= 632, \\ 42A_2^1 &= A_1^1A_2^1 + 2A_2^2, \\ 1344 &= 632 + 2A_2^2, \\ A_2^2 &= 356, \\ 30A_1^2 &= 3A_1^3 + A_1^2A_2^1, \\ 5649 &= 1728 + A_1^2A_2^1, \end{aligned}$$

$$A_1^2 A_2^1 = 3912,$$
$$30 A_1^1 A_2^1 = 2 A_1^2 A_2^1 + 2 A_1^1 A_2^2,$$
$$18960 = 7824 + 2 A_1^1 A_2^2,$$
$$A_1^1 A_2^2 = 5568,$$
$$30 A_2^2 = A_1^1 A_2^2 + 3 A_2^3,$$
$$10680 = 5568 + 3 A_2^3,$$
$$A_2^3 = 1704,$$
$$20 A_1^3 = 4 A_1^4 + A_1^3 A_2^1,$$
$$11520 = 2608 + A_1^3 A_2^1,$$
$$A_1^3 A_2^1 = 8912,$$
$$20 A_1^2 A_2^1 = 2 A_1^3 A_2^1 + 2 A_1^2 A_2^2,$$
$$78240 = 26736 + 2 A_1^2 A_2^2,$$
$$A_1^2 A_2^2 = 25752,$$
$$20 A_1^1 A_2^2 = 2 A_1^2 A_2^2 + 3 A_1^1 A_2^3,$$
$$111360 = 51504 + 3 A_1^1 A_2^3,$$
$$A_1^1 A_2^3 = 19952,$$
$$20 A_2^3 = A_1 A_2^3 + 4 A_2^4.$$
$$34080 = 19952 + 4 A_2^4,$$
$$A_2^4 = 3532,$$
$$12 A_1^4 = 5 A_1^5 + A_1^4 A_2^1,$$
$$7824 = 1040 + A_1^4 A_2^1,$$
$$A_1^4 A_2^1 = 6784,$$
$$12 A_1^3 A_2^1 = 4 A_1^4 A_2^1 + 2 A_1^3 A_2^2,$$
$$106944 = 27136 + 2 A_1^3 A_2^2,$$
$$A_1^3 A_2^2 = 39904,$$
$$12 A_1^2 A_2^2 = 3 A_1^3 A_2^2 + 3 A_1^2 A_2^3,$$
$$309024 = 119712 + 3 A_1^2 A_2^3,$$
$$A_1^2 A_2^3 = 63104,$$
$$12 A_1^1 A_2^3 = 2 A_1^2 A_2^3 + 4 A_1^1 A_2^4,$$
$$239424 = 126208 + 4 A_1^1 A_2^4,$$
$$A_1^1 A_2^4 = 28304,$$
$$12 A_2^4 = A_1^1 A_2^4 + 5 A_2^5,$$
$$42384 = 28304 + 5 A_2^5,$$
$$A_2^5 = 2816,$$
$$6 A_1^5 = 6 A_1^6 + A_1^5 A_2^1,$$
$$1248 = 48 + A_1^5 A_2^1,$$

$$A_1^5 A_2^1 = 1200,$$
$$6A_1^4 A_2^1 = 5A_1^5 A_2^1 + 2A_1^4 A_2^2,$$
$$40704 = 6000 + 2A_1^4 A_2^2,$$
$$A_1^4 A_2^2 = 17352,$$
$$6A_1^3 A_2^2 = 4A_1^4 A_2^2 + 3A_1^3 A_2^3,$$
$$239424 = 69408 + 3A_1^3 A_2^3,$$
$$A_1^3 A_2^3 = 56672,$$
$$6A_1^2 A_2^3 = 3A_1^3 A_2^3 + 4A_1^2 A_2^4,$$
$$378624 = 170016 + 4A_1^2 A_2^4,$$
$$A_1^2 A_2^4 = 52152,$$
$$6A_1^1 A_2^4 = 2A_1^2 A_2^4 + 5A_1^1 A_2^5,$$
$$169824 = 104304 + 5A_1^1 A_2^5,$$
$$A_1^1 A_2^5 = 13104,$$
$$6A_2^5 = A_1^1 A_2^5 + 6A_2^6,$$
$$16896 = 13104 + 6A_2^6,$$
$$A_2^6 = 632,$$
$$2A_1^6 = 7A_1^7 + A_1^6 A_2^1,$$
$$16 = A_1^6 A_2^1.$$
$$2A_1^5 A_2^1 = 6A_1^6 A_2^1 + 2A_1^5 A_2^2,$$
$$2400 = 96 + 2A_1^5 A_2^2,$$
$$A_1^5 A_2^2 = 1152,$$
$$2A_1 A_2^2 = 5A_1^5 A_2^2 + 3A_1^4 A_2^3,$$
$$34704 = 5760 + 3A_1^4 A_2^3,$$
$$A_1^4 A_2^3 = 9648,$$
$$2A_1^3 A_2^3 = 4A_1^4 A_2^3 + 4A_1^3 A_2^4,$$
$$113344 = 38592 + 4A_1^3 A_2^4,$$
$$A_1^3 A_2^4 = 18688,$$
$$2A_1^2 A_2^4 = 3A_1^3 A_2^4 + 5A_1^2 A_2^5,$$
$$104304 = 56064 + 5A_1^2 A_2^5,$$
$$A_1^2 A_2^5 = 9648,$$
$$2A_1^1 A_2^5 = 2A_1^2 A_2^5 + 6A_1^1 A_2^6,$$
$$26208 = 19296 + 6A_1^1 A_2^6,$$
$$A_1 A_2^6 = 1152,$$
$$2A_2^6 = A_1^1 A_2^6 + 7A_2^7,$$
$$1264 = 1152 + 7A_2^7,$$
$$A_2^7 = 16.$$

VII.

Problème des fous sur les cases noires (1) d'un échiquier ordinaire.

Nous venons donc d'obtenir, comme nombres des solutions du problème des tours sur l'échiquier A_2 à 32 cases, les nombres suivants :

$$A_2^1 = 32,$$
$$A_2^2 = 356,$$
$$A_2^3 = 1704,$$
$$A_2^4 = 3532,$$
$$A_2^5 = 2816,$$
$$A_2^6 = 632,$$
$$A_2^7 = 16.$$

Or il est évident que les 32 points de l'échiquier A_2 du § VI peuvent être considérés comme centres des 32 cases noires d'un échiquier ordinaire; la marche de la tour deviendra alors celle du fou. Donc il est possible de placer (2) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 fous sur les cases noires d'un échiquier ordinaire de 32, 356, 1704, 3532, 2816, 632, 16 manières différentes respectivement.

VIII.

Il est facile de résoudre maintenant le problème des fous, tel qu'on le pose ordinairement :

Déterminer le nombre des manières de placer 8 fous sur un échiquier à 64 cases.

---

(1) Je ne dis *cases noires* que pour fixer les idées; on pourrait tout aussi bien mettre *cases blanches*.

(2) Je dis, pour abréger, *placer*, au lieu de dire *placer conformément à l'énoncé du problème des fous*.

On aura

7 fous sur des cases noires, 1 fou sur une case blanche..................	$16 \times 32 =$	512
6 f. c. n., 2 f. c. bl..................	$632 \times 356 =$	224992
5 f. c. n., 3 f. c. bl..................	$2816 \times 1704 =$	4798464
4 f. c. n., 4 f. c. bl..................	$3532^2 =$	12475024
3 f. c. n., 5 f. c. bl..................	$1704 \times 2816 =$	4798464
2 f. c. n., 6 f. c. bl..................	$356 \times 632 =$	224992
1 f. c. n., 7 f. c. bl..................	$32 \times 16 =$	512
Nombre des solutions......		22522960