Bulletin de la S. M. F.

Bobeck

Remarque sur la ligne de striction de l'hyperboloïde à une nappe

Bulletin de la S. M. F., tome 11 (1883), p. 125-129
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1883__11__125_1>

Remarque sur la ligne de striction de l'hyperboloïde à une nappe; par M. K. Bobek (Assistant à l'École Polytechnique de Prague).

(Séance du 6 juillet 1883.)

Je crois que l'on n'a pas encore remarqué que la ligne de striction de l'hyperboloïde à une nappe est composée de deux courbes gauches du quatrième degré de seconde espèce, respectivement pour chaque série de génératrices; une courbe coupant les droites de la série correspondante en un point, qui est le point central, et les droites de l'autre série en trois points.

Voici comment on le peut démontrer. Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{1}$$

l'équation de l'hyperboloïde et

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{2}$$

l'équation de son cône asymptotique Q. Menons par la génératrice g de l'hyperboloïde le plan G qui est normal au plan G' passant par g et tangent au cône Q.

Le point a de contact du plan G est le point central de la génératrice g. Soient y la génératrice du cône Q parallèle à g et $\mathfrak{E}$ le plan qui passe par y et qui est normal au cône. $\mathfrak{E}$ est alors parallèle à G et celui-ci touche par conséquent l'hyperboloïde au point a qui se trouve sur le rayon conjugué du plan $\mathfrak{E}$ à l'égard du cône. Mais le plan $\mathfrak{E}$ a pour équation

$$-\frac{\alpha}{x}\xi + \frac{\beta}{y}\eta + \frac{\gamma}{z}\zeta = 0.$$

Soient (x, y, z) les coordonnées d'un point de $\mathfrak{E}$ et

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, \\ \beta &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}, \\ \gamma &= \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}; \end{aligned}\right. \tag{3}$$

le rayon conjugué aura pour équations

$$\left\{\begin{aligned} \rho\xi &= -\frac{a^2\alpha}{x}, \\ \rho\eta &= \frac{b^2\beta}{y}, \\ \rho\zeta &= -\frac{c^2\gamma}{z}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Pour les points d'intersection avec l'hyperboloïde, on trouve

$$\rho = \pm\sqrt{\frac{a^2\alpha^2}{x^2} + \frac{b^2\beta^2}{y^2} - \frac{c^2\gamma^2}{z^2}}, \tag{5}$$

x, y, z étant liés par l'équation (2).

Le lieu de tous les rayons (4) est un cône du quatrième degré, qui a les axes de l'hyperboloïde pour génératrices doubles. Son équation est

$$\frac{a^2\alpha^2}{\xi^2} + \frac{b^2\beta^2}{\eta^2} - \frac{c^2\gamma^2}{\zeta^2} = \rho^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) = 0. \tag{6}$$

La ligne de striction paraît être du huitième degré ; mais je veux montrer qu'elle se décompose.

En joignant les deux points dont les coordonnées sont (ξ, η, ζ), $(-\xi, -\eta, \zeta)$ par la droite qui a pour équations

$$x = \mu\xi,$$
$$y = \mu\eta,$$
$$z = \zeta,$$

on obtient, en vertu des équations (1) et (5),

$$\mu^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) - \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right) = 0,$$
$$\mu^2\frac{c^2\gamma^2}{z^2} - \left(\frac{a^2\alpha^2}{x^2} + \frac{b^2\beta^2}{y^2}\right) = 0$$

et, en éliminant le paramètre arbitraire μ^2,

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{a^2\alpha^2}{x^2} + \frac{b^2\beta^2}{y^2}\right) - \frac{c^2\gamma^2}{z^2}\left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right) = 0.$$

Or, eu égard à la relation $\beta + \gamma = \alpha$, on a l'identité

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha\beta,$$

et la dernière équation devient

$$\left(\frac{a\alpha}{b}\frac{y}{x} + \frac{b\beta}{a}\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{c^2\gamma^2}{z^2}$$
$$= \left(\frac{a\alpha}{b}\frac{y}{x} + \frac{b\beta}{a}\frac{x}{y} - \frac{c\gamma}{z}\right)\left(\frac{a\alpha}{b}\frac{y}{x} + \frac{b\beta}{a}\frac{x}{y} + \frac{c\gamma}{z}\right) = 0,$$

ce qui donne les deux surfaces réglées du troisième ordre

$$C_z \qquad (a^2\alpha y^2 + b^2\beta x^2)z - abc\gamma xy = 0,$$
$$D_z \qquad (a^2\alpha y^2 + b^2\beta x^2)z + abc\gamma xy = 0,$$

qui passent chacune par deux droites de l'hyperboloïde, à savoir :

C_z par les droites $\frac{y}{x} = -i\frac{b}{a}$, $z = +ic$ et $\frac{y}{x} = +i\frac{b}{a}$, $z = -ic$,

D_z par les droites $\frac{y}{x} = -i\frac{b}{a}$, $z = -ic$ et $\frac{y}{x} = +i\frac{b}{a}$, $z = +ic$, et qui coupent par conséquent l'hyperboloïde suivant des courbes du quatrième degré de seconde espèce.

Soient C_4 et D_4 les courbes d'intersection de C_z et de D_z avec l'hyperboloïde; on trouve alors que les surfaces réglées

$$\begin{array}{ll} C_x & (b^2\beta z^2 + c^2\gamma y^2)x - abc\alpha xy = 0, \\ C_y & (c^2\gamma x^2 - a^2\alpha z^2)y - abc\beta xz = 0 \end{array}$$

passent aussi par la courbe C_4 et que les surfaces

$$\begin{array}{ll} D_x & (b^2\beta z^2 + c^2\gamma y^2)x + abc\alpha xy = 0, \\ D_y & (c^2\gamma x^2 - a^2\alpha z^2)y + abc\beta xz = 0 \end{array}$$

passent par la courbe D_4. Les génératrices d'intersection de ces surfaces avec l'hyperboloïde sont :

Pour C_x les droites... $\frac{y}{z} = +\frac{b}{c}$, $x = +a$; $\frac{y}{z} = -\frac{b}{c}$, $x = +a$,

Pour C_y les droites... $\frac{x}{z} = +\frac{a}{c}$, $y = -b$; $\frac{x}{z} = -\frac{a}{c}$, $y = +b$,

Pour D_x les droites... $\frac{y}{z} = -\frac{b}{c}$, $x = +a$; $\frac{y}{z} = +\frac{b}{c}$, $x = +a$,

Pour D_y les droites... $\frac{x}{z} = -\frac{a}{c}$, $y = -b$; $\frac{x}{z} = +\frac{a}{c}$, $y = +b$.

La courbe C_4 appartenant comme ligne de striction à la série (g) des génératrices de l'hyperboloïde, les droites qui ont les surfaces C_z, C_x, C_y communes avec l'hyperboloïde appartiennent à la même série (g), tandis que les autres droites mentionnées sont de la seconde série (g').

En vertu de cette décomposition de la courbe du huitième degré en deux courbes du quatrième degré, il est nécessaire que la racine carrée (5) s'exprime rationnellement.

Posons, en effet,

$$x = \nu a \sin\varphi,$$
$$y = \nu b \cos\varphi,$$
$$z = \nu c;$$

soient ν et φ deux paramètres arbitraires; les coordonnées x, y, z

satisfont toujours à l'équation (2), et l'on a

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2 \cos^2\varphi + \beta^2 \sin^2\varphi - \gamma^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{\nu^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi} = \left(\frac{\alpha - \gamma \sin^2\varphi}{\nu \sin\varphi \cos\varphi}\right)^2,$$

eu égard à l'identité $\beta^2 - \alpha^2 - \gamma^2 = -2\alpha\gamma$.

Les équations de la courbe C_4 sont alors

$$\xi = -\frac{a\alpha \cos\varphi}{\alpha - \gamma \sin^2\varphi}, \quad \eta = \frac{b\beta \sin\varphi}{\alpha - \gamma \sin^2\varphi}, \quad \zeta = -\frac{c\gamma \cos\varphi \sin\varphi}{\alpha - \gamma \sin^2\varphi},$$

et celles de la courbe D_4

$$\xi = \frac{a\alpha \cos\varphi}{\alpha - \gamma \sin^2\varphi}, \quad \eta = -\frac{b\beta \sin\varphi}{\alpha - \gamma \sin^2\varphi}, \quad \zeta = \frac{c\gamma \cos\varphi \sin\varphi}{\alpha - \gamma \sin^2\varphi}.$$

En posant $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = t$, on mettra en évidence le degré de la courbe; il vient en effet

$$\xi = \mp \frac{a\alpha(1 - t^2)(1 + t^2)}{\alpha(1 + t^2)^2 - 4\gamma t^2},$$

$$\eta = \pm \frac{2b\beta t(1 + t^2)}{\alpha(1 + t^2)^2 - 4\gamma t^2},$$

$$\zeta = \mp \frac{2c\gamma t(1 - t^2)}{\alpha(1 + t^2)^2 - 4\gamma t^2},$$

le signe supérieur correspondant à la C_4 et le signe inférieur à la D_4.

Les projections de cette courbe gauche et les relations métriques se calculent aisément au moyen des formules données.
