

# BULLETIN DE LA S. M. F.

P. APPELL

**Sur des cas de réductions des fonctions  $\Theta$  de plusieurs variables à des fonctions  $\Theta$  d'un moindre nombre de variables**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 10 (1882), p. 59-67

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1882\\_\\_10\\_\\_59\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__59_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

*Sur des cas de réduction des fonctions  $\Theta$  de plusieurs variables à des fonctions  $\Theta$  d'un moindre nombre de variables; par M. APPELL.*

(Séance du 3 mars 1882.)

La formule de réduction pour les fonctions  $\Theta$  de deux variables que j'ai indiquée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 13 février 1882 peut être généralisée de la façon suivante :

I. Considérons la fonction

$$(1) \quad \Theta(x_1, x_2, \dots, x_p | a_{ij}) = \sum_{m_i = -\infty}^{m_i = +\infty} e^{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_p x_p + \varphi(m_1, m_2, \dots, m_p)},$$

où  $\varphi(m_1, m_2, \dots, m_p)$  désigne la forme quadratique

$$\sum_{i, j = 1}^{i, j = p} a_{ij} m_i m_j, \quad (a_{ij} = a_{ji}).$$

Supposons que les périodes relatives à  $x_p$ ,

$$2\pi\sqrt{-1}, 2a_{p1}, 2a_{p2}, \dots, 2a_{pp},$$

soient liées par  $(p - 1)$  relations distinctes à coefficients entiers de la forme

$$(2) \quad k_{i1} a_{p1} + k_{i2} a_{p2} + \dots + k_{ip} a_{pp} = h_i \pi \sqrt{-1},$$

où

$$i = 1, 2, \dots, (p - 1),$$

les lettres  $k_{ij}$  et  $h_i$  désignant des nombres entiers. Dans cette hypothèse, les périodes relatives à  $x_p$  se réduisent à deux; et la fonction  $\Theta$  définie par l'équation (1) peut être exprimée à l'aide de fonctions  $\Theta$  de  $(p - 1)$  variables et de fonctions  $\theta$  d'une variable.

Pour le montrer, remarquons d'abord que le déterminant des  $(p - 1)^2$  nombres entiers

$$k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{i, p-1} \quad (i = 1, 2, \dots, p - 1)$$

ne peut pas être nul. En effet, si ce déterminant était nul, on pourrait, en multipliant les deux membres des équations (2) par des entiers convenables et ajoutant, éliminer  $a_{p1}, \dots, a_{p,p-1}$  et obtenir une relation de la forme

$$N a_{pp} = N' \pi \sqrt{-1},$$

$N$  et  $N'$  étant entiers. Mais, comme la partie réelle de  $a_{pp}$  est négative et ne peut pas être nulle, on aurait nécessairement  $N = 0$ ,  $N' = 0$ , et, par suite, les relations (2) ne seraient pas distinctes; ce qui est contre l'hypothèse.

Le déterminant des coefficients de  $a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{p,p-1}$ , dans les équations (2), n'étant pas nul, on peut résoudre ces équations par rapport à ces quantités, et l'on en tirera des expressions de la forme

$$(3) \quad k'_i a_{pi} = k''_i a_{pp} + l_i \pi \sqrt{-1}, \quad (i = 1, 2, \dots, p-1),$$

$k'_i, k''_i, l_i$  étant des entiers; certains des nombres  $k'_i$  et  $l_i$  peuvent être nuls. Je suppose, pour plus de généralité, que  $k''_1, k''_2, \dots, k''_\nu$  soient nuls,  $k''_{\nu+1}, k''_{\nu+2}, \dots, k''_{p-1}$  étant différents de zéro; en multipliant les deux membres des équations (3) par des entiers convenables, on pourra faire en sorte que les coefficients de  $a_{pp}$  dans les  $p - \nu - 1$  dernières des équations (3) deviennent égaux au plus petit commun multiple de  $k''_{\nu+1}, k''_{\nu+2}, \dots, k''_{p-1}$ . Ces relations (3) peuvent alors s'écrire

$$(4) \quad \begin{cases} n_i a_{pi} = q_i \pi \sqrt{-1}, & (i = 1, 2, \dots, \nu), \\ n_{\nu+j} a_{p,\nu+j} = n_p a_{pp} + q_{\nu+j} \pi \sqrt{-1}, & (j = 1, 2, \dots, p - \nu - 1). \end{cases}$$

Dans ces relations (4), on peut toujours supposer les entiers  $n_1, n_2, \dots, n_p$  positifs; pour les  $\nu$  nombres  $n_i$  la chose est évidente, car on peut évidemment changer les signes des deux membres des  $\nu$  premières équations; quant aux  $(p - \nu - 1)$  nombres  $n_{\nu+j}$ , on remarquera d'abord que l'on peut ramener les parties réelles des périodes  $a_{p,\nu+j}$  à être négatives, car l'on peut, dans la fonction (1), changer le signe de  $a_{p,\nu+j}$  à condition de changer en même temps le signe de toutes les autres périodes dont *un seul* des indices est  $(\nu + j)$  et celui de  $x_{\nu+j}$ ; cela revient en effet à changer  $m_{\nu+j}$  en  $-m_{\nu+j}$ . Les parties réelles des périodes  $a_{p,\nu+j}$

étant ainsi ramenées à être négatives comme la partie réelle de  $a_{pp}$ , les entiers  $n_{v+j}$  et  $n_p$  sont de même signe, et, comme on peut changer les signes des deux membres des équations (4), on peut faire en sorte que les entiers  $n_{v+j}$  et  $n_p$  soient positifs.

Cela posé, faisons

$$(5) \quad m_\rho = n_\rho \mu_\rho + t_\rho, \quad (0 \leq t_\rho \leq n_\rho - 1), \quad (\rho = 1, 2, \dots, p),$$

$\mu_\rho$  et  $t_\rho$  désignant des entiers dont l'un est le quotient et l'autre le reste de la division de  $m_\rho$  par  $n_\rho$ .

On obtient toutes les valeurs de  $m_\rho$  de  $-\infty$  à  $+\infty$  et seulement une fois chacune de ces valeurs en faisant, dans (5), varier  $\mu_\rho$  de  $-\infty$  à  $+\infty$  et  $t_\rho$  de 0 à  $n_\rho - 1$ .

L'on a, d'après cela, pour la fonction (1), l'expression

$$(6) \quad \sum_{t_\rho=0}^{t_\rho=n_\rho-1} \sum_{\mu_\rho=-\infty}^{\mu_\rho=+\infty} e^{(n_1 \mu_1 + t_1) x_1 + \dots + (n_p \mu_p + t_p) x_p + \varphi(n_1 \mu_1 + t_1, \dots, n_p \mu_p + t_p)}.$$

Posons

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_p x_p + \varphi(t_1, t_2, \dots, t_p), \\ \alpha_\rho = n_\rho x_\rho + n_\rho \frac{\partial \varphi(t_1, t_2, \dots, t_p)}{\partial t_\rho} \quad (\rho = 1, 2, \dots, p); \end{cases}$$

l'expression (6) de la fonction  $\Theta$  considérée devient

$$(8) \quad \sum_{t_\rho=0}^{t_\rho=n_\rho-1} \sum_{\mu_\rho=-\infty}^{\mu_\rho=+\infty} e^{\alpha + \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 + \dots + \mu_p \alpha_p + \varphi(n_1 \mu_1 + t_1, n_2 \mu_2 + t_2, \dots, n_p \mu_p + t_p)};$$

on a identiquement

$$\begin{aligned} \varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_p \mu_p) &= \varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_{p-1} \mu_{p-1}, 0) \\ &+ 2 n_p \mu_p (\mu_1 n_1 \alpha_{p1} + \mu_2 n_2 \alpha_{p2} + \dots + \mu_{p-1} n_{p-1} \alpha_{p,p-1}) + n_p^2 \mu_p^2 \alpha_{pp}; \end{aligned}$$

remplaçons dans le coefficient de  $2 n_p \mu_p$  les quantités

$$n_1 \alpha_{p1}, n_2 \alpha_{p2}, \dots, n_{p-1} \alpha_{p,p-1}$$

par leurs valeurs (4); nous avons

$$(9) \quad \begin{cases} \varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_p \mu_p) = \varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_{p-1} \mu_{p-1}, 0), \\ + n_p^2 \alpha_{pp} (\mu_p^2 + 2 \mu_p \mu_{v+1} + 2 \mu_p \mu_{v+2} + \dots + 2 \mu_p \mu_{p-1}) + 2 M \pi \sqrt{-1}, \end{cases}$$

M étant entier; cette expression (9) peut s'écrire

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_p \mu_p) \\ & = \varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_{p-1} \mu_{p-1}, 0) \\ & \quad - n_p^2 \alpha_{pp} (\mu_{\nu+1} + \mu_{\nu+2} + \dots + \mu_{p-1})^2 \\ & \quad + n_p^2 \alpha_{pp} (\mu_{\nu+1} + \mu_{\nu+2} + \dots + \mu_{p-1} + \mu_p)^2 + 2M\pi\sqrt{-1}. \end{aligned} \right.$$

Dans cette expression (10), la partie indépendante de  $\mu_p$ , à savoir :

$$\varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_{p-1} \mu_{p-1}, 0) - n_p^2 \alpha_{pp} (\mu_{\nu+1} + \mu_{\nu+2} + \dots + \mu_{p-1})^2,$$

est une forme quadratique  $\Phi(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1})$  des  $p - 1$  variables  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}$ ; et si l'on écrit cette forme de la façon suivante :

$$(11) \quad \Phi(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}) = \sum_{i,j=0}^{i,j=p-1} A_{ij} \mu_i \mu_j, \quad (A_{ij} = A_{ji}),$$

on a

$$(11') \quad \left\{ \begin{aligned} A_{ii} &= n_i^2 a_{ii}, & \text{si } i \leq \nu, \\ A_{ii} &= n_i^2 a_{ii} - n_p^2 \alpha_{pp}, & \text{si } i > \nu, \\ A_{ij} &= n_i n_j a_{ij}, & \text{si } i \text{ ou } j \leq \nu, \\ A_{ij} &= n_i n_j a_{ij} - n_p^2 \alpha_{pp}, & \text{si } i \text{ et } j > \nu. \end{aligned} \right.$$

D'après cela, dans la somme (8), l'exposant de  $e$  peut s'écrire, en laissant de côté  $2M\pi\sqrt{-1}$ , qui est une période de la fonction exponentielle,

$$\alpha + \mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_p \alpha_p + \alpha_{pp} n_p^2 (\mu_{\nu+1} + \mu_{\nu+2} + \dots + \mu_p)^2 + \Phi(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1})$$

ou bien

$$\begin{aligned} & \alpha + \mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_\nu \alpha_\nu + \mu_{\nu+1} (\alpha_{\nu+1} - \alpha_p) + \dots \\ & \quad + \mu_{p-1} (\alpha_{p-1} - \alpha_p) + \Phi(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}) \\ & + (\mu_{\nu+1} + \mu_{\nu+2} + \dots + \mu_{p-1} + \mu_p) \alpha_p + \alpha_{pp} n_p^2 (\mu_{\nu+1} + \mu_{\nu+2} + \dots + \mu_p)^2. \end{aligned}$$

Cela posé, faisons dans l'expression (8) la sommation par rapport à  $\mu_p$  en laissant toutes les autres quantités constantes; nous pourrons mettre en facteur, dans le terme général de cette somme, la quantité

$$(12) \quad e^{\alpha + \mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_{p-1} (\alpha_{p-1} - \alpha_p) + \Phi(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1})},$$

et nous aurons à faire la somme

$$\sum_{\mu_p = -\infty}^{\mu_p = +\infty} e^{(\mu_{v+1} + \dots + \mu_p) \alpha_p + \alpha_{pp} n_p^2 (\mu_{v+1} + \dots + \mu_p)^2},$$

somme qui n'est autre que  $\theta_3(\alpha_p | 2\pi\sqrt{-1}, 2n_p^2 \alpha_{pp})^{(1)}$ ; la sommation par rapport à  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}$  donne ensuite à chercher la somme des termes tels que (12), somme qui est égale à

$$e^\alpha \theta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v, \alpha_{v+1} - \alpha_p, \dots, \alpha_{p-1} - \alpha_p | A_{ij}).$$

Donc enfin

$$\begin{aligned} & \theta(x_1, x_2, \dots, x_p | a_{ij}) \\ &= \sum_{t_p = 0}^{t_p = n_p - 1} e^\alpha \theta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v, \alpha_{v+1} - \alpha_p, \dots, \alpha_{p-1} - \alpha_p | A_{ij}) \theta_3(\alpha_p | 2\pi\sqrt{-1}, 2n_p^2 \alpha_{pp}). \end{aligned}$$

Telle est la formule de réduction annoncée.

II. Il est un autre cas, où la fonction  $\Theta$ , définie par la série (1), subit une réduction analogue : c'est le cas où les  $p$  groupes de périodes simultanées des  $(p - 1)$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$  se réduisent à  $(p - 1)$  groupes distincts. Cette circonstance se présente lorsque, entre les périodes relatives à ces variables, ont lieu des relations de la forme

$$(13) \quad \begin{cases} k_1 a_{i1} + k_2 a_{i2} + \dots + k_{p-1} a_{i,p-1} + k_p a_{i,p} = h_i \pi \sqrt{-1}, \\ (i = 1, 2, \dots, p - 1), \end{cases}$$

$k_1, k_2, \dots, k_p, h_1, h_2, \dots, h_{p-1}$  étant des *nombres entiers*.

Il importe de remarquer que  $k_p$  ne peut pas être nul; en effet, supposons  $k_p = 0$ , multiplions la première des relations (13) par  $k_1$ , la seconde par  $k_2$ , ... la dernière par  $k_{p-1}$ , et ajoutons; nous avons

$$\varphi(k_1, k_2, \dots, k_{p-1}, 0) = M \pi \sqrt{-1},$$

$M$  étant réel. Or cette relation est impossible, car, quelles que

(<sup>1</sup>) Je désigne par  $\theta_3(z | \omega, \omega')$  la fonction  $\theta_3$  formée avec  $\omega$  et  $\omega'$  (Voir *Théorie des fonctions elliptiques* de MM. Briot et Bouquet, p. 115).

soient les valeurs attribuées aux entiers  $m_1, m_2, \dots, m_p$ , la partie réelle de  $\varphi(m_1, m_2, \dots, m_p)$  est *négative* et n'est jamais *nulle*. Il n'est donc pas permis de supposer  $k_p = 0$ . Mais il peut arriver que certains des entiers  $k_1, k_2, \dots, k_{p-1}$  soient nuls.

Je vais traiter le cas où *aucun des entiers*  $k_1, k_2, \dots, k_p$  n'est égal à zéro. Ces entiers ont d'ailleurs des signes quelconques. Faisons, comme précédemment,

$$(14) \quad m_\rho = k_\rho \mu_\rho + t_\rho, \quad (\rho = 1, 2, \dots, p),$$

$\mu_\rho$  et  $t_\rho$  étant deux entiers dont le second  $t_\rho$  est positif et satisfait à l'une ou l'autre des conditions

$$(15) \quad \begin{cases} 0 \leq t_\rho \leq k_\rho - 1 & \text{si } k_\rho > 0, \\ 0 \leq t_\rho \leq -k_\rho - 1 & \text{si } k_\rho < 0. \end{cases}$$

L'on obtient encore toutes les valeurs de  $m_\rho$  en faisant varier  $\mu_\rho$  de  $-\infty$  à  $+\infty$  et donnant à  $t_\rho$  les valeurs satisfaisant aux conditions (15). La série (1) peut donc s'écrire

$$(16) \quad \sum_{t_\rho} \sum_{\mu_\rho = -\infty}^{\mu_\rho = +\infty} e^{(k_1 \mu_1 + t_1)x_1 + \dots + (k_p \mu_p + t_p)x_p + \varphi(k_1 \mu_1 + t_1, \dots, k_p \mu_p + t_p)}.$$

Le signe  $\sum_{t_\rho}$  indique une somme étendue aux valeurs (15) de  $t_1, t_2, \dots, t_p$ . Posons

$$(17) \quad \begin{cases} \beta = t_1 x_1 + \dots + t_p x_p + \varphi(t_1, t_2, \dots, t_p), \\ \beta_\rho = k_\rho x_\rho + k_\rho \frac{\partial \varphi(t_1, t_2, \dots, t_p)}{\partial t_\rho} \quad (\rho = 1, 2, \dots, p); \end{cases}$$

l'exposant de  $e$ , dans la somme (16), devient

$$(18) \quad \beta + \mu_1 \beta_1 + \dots + \mu_p \beta_p + \varphi(k_1 \mu_1, k_2 \mu_2, \dots, k_p \mu_p).$$

Dans cet exposant, écrivons, au lieu de  $\varphi(k_1 \mu_1, k_2 \mu_2, \dots, k_p \mu_p)$ ,

$$\varphi[k_1 \mu_p + k_1(\mu_1 - \mu_p), k_2 \mu_p + k_2(\mu_2 - \mu_p), \dots, k_{p-1} \mu_p + k_{p-1}(\mu_{p-1} - \mu_p), k_p \mu_p + 0],$$

et développons par la série de Taylor, en considérant

$$k_1(\mu_1 - \mu_p), k_2(\mu_2 - \mu_p), \dots, k_{p-1}(\mu_{p-1} - \mu_p), 0$$

comme les accroissements des variables. Il est aisé de voir que, en

vertu des relations (13), ce développement se réduit à

$$\varphi(k_1 \mu_p, k_2 \mu_p, \dots, k_p \mu_p) + \varphi[k_1(\mu_1 - \mu_p), k_2(\mu_2 - \mu_p), \dots, k_{p-1}(\mu_{p-1} - \mu_p), 0] + 2N\pi\sqrt{-1},$$

N étant entier; en effet, le coefficient de  $k_i(\mu_i - \mu_p)$ , dans ce développement, est

$$\frac{\partial \varphi(k_1 \mu_p, k_2 \mu_p, \dots, k_p \mu_p)}{\partial (k_i \mu_p)}, \text{ c'est-à-dire}$$

$$2\mu_p(k_1 a_{i1} + k_2 a_{i2} + \dots + k_p a_{ip})$$

ou, d'après (13),  $2\mu_p h_i \pi \sqrt{-1}$ .

L'expression (18) peut donc s'écrire

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} & \beta + (\mu_1 - \mu_p)\beta_1 + (\mu_2 - \mu_p)\beta_2 + \dots + (\mu_{p-1} - \mu_p)\beta_{p-1} \\ & + \varphi[k_1(\mu_1 - \mu_p), \dots, k_{p-1}(\mu_{p-1} - \mu_p), 0] + \mu_p(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p) \\ & + \mu_p^2 \varphi(k_1, k_2, \dots, k_p) + 2N\pi\sqrt{-1}. \end{aligned} \right.$$

Alors, dans la somme (16), laissons d'abord  $\mu_p$  constant et sommons par rapport à  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}$ ; nous pourrions mettre en facteur dans le terme général l'expression

$$(20) \quad e^{\beta + \mu_p(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p) + \mu_p^2 \varphi(k_1, k_2, \dots, k_p)},$$

et la somme à évaluer sera

$$\sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_{p-1} = +\infty \\ \mu_1, \dots, \mu_{p-1} = -\infty}} e^{(\mu_1 - \mu_p)\beta_1 + \dots + (\mu_{p-1} - \mu_p)\beta_{p-1} + \varphi[k_1(\mu_1 - \mu_p), \dots, k_{p-1}(\mu_{p-1} - \mu_p), 0]},$$

c'est-à-dire une fonction  $\Theta$  de  $p - 1$  variables

$$\Theta(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1} | k_i' k_j' a_i' j') \quad \left( \begin{array}{l} i' = 1, 2, \dots, p-1 \\ j' = 1, 2, \dots, p-1 \end{array} \right).$$

Si ensuite nous faisons la sommation par rapport à  $\mu_p$ , nous avons à évaluer la somme des expressions (20),  $\mu_p$  variant de  $-\infty$  à  $+\infty$ , ce qui donne

$$e^{\beta} \theta_3[\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p | 2\pi\sqrt{-1}, 2\varphi(k_1, k_2, \dots, k_p)].$$

Donc enfin, d'après la formule (16),

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Theta(x_1, x_2, \dots, x_p | a_{ij}) \\ & = \sum_{i'} e^{\beta} \Theta(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1} | k_i' k_j' a_i' j') \\ & \quad \times \theta_3[\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p | 2\pi\sqrt{-1}, 2\varphi(k_1, k_2, \dots, k_p)]; \end{aligned} \right.$$

ce qui donne l'expression cherchée.



Il est à remarquer que  $2\varphi(k_1, k_2, \dots, k_p)$  se réduit, en négligeant un multiple de  $2\pi\sqrt{-1}$ , à

$$k_p \frac{\partial \varphi(k_1, k_2, \dots, k_p)}{\partial k_p},$$

car les relations (13) peuvent s'écrire

$$\frac{\partial \varphi(k_1, k_2, \dots, k_p)}{\partial k_i} = 2h_i \pi \sqrt{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, p-1).$$

III. Une méthode analogue s'applique au cas où, dans les relations (13), certains des entiers  $k_1, k_2, \dots, k_p$  sont nuls. Si l'on suppose

$$k_1 = k_2 = \dots = k_\nu = 0,$$

$k_{\nu+1}, k_{\nu+2}, \dots, k_p$  étant différents de zéro, il faudra poser

$$\begin{aligned} m_\lambda &= \mu_\lambda & (\lambda = 1, 2, \dots, \nu), \\ m_{\nu+\rho} &= k_{\nu+\rho} \mu_{\nu+\rho} + t_\rho & (\rho = 1, 2, \dots, p-\nu), \end{aligned}$$

les entiers  $t_\rho$  étant assujettis à la condition

$$(22) \quad \begin{cases} 0 \leq t_\rho \leq k_{\nu+\rho} - 1 & \text{si } k_{\nu+\rho} > 0, \\ 0 \leq t_\rho \leq -k_{\nu+\rho} - 1 & \text{si } k_{\nu+\rho} < 0. \end{cases}$$

La fonction  $\Theta(1)$  peut alors s'écrire

$$(23) \quad \sum_{t_\rho} \sum_{\mu_i = -\infty}^{\mu_i = +\infty} e^{\mu_1 x_1 + \dots + \mu_\nu x_\nu + (\mu_{\nu+1} k_{\nu+1} + t_1) x_{\nu+1} + \dots + (\mu_p k_p + t_{p-\nu}) x_p + \varphi(\mu_1, \dots, \mu_\nu, k_{\nu+1} \mu_{\nu+1} + t_1, \dots, k_p \mu_p + t_{p-\nu})},$$

le signe  $\sum_{t_\rho}$  indiquant une sommation faite par rapport à  $t_1, t_2, \dots,$

$t_{p-\nu}$  et étendue aux valeurs (22).

Si l'on pose

$$\gamma = t_1 x_{\nu+1} + t_2 x_{\nu+2} + \dots + t_{p-\nu} x_p + \varphi(0, 0, \dots, 0, t_1, \dots, t_{p-\nu}),$$

$$\gamma_\lambda = x_\lambda + 2(\alpha_{\lambda, \nu+1} t_1 + \alpha_{\lambda, \nu+2} t_2 + \dots + \alpha_{\lambda, p} t_{p-\nu}), \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \nu),$$

$$\gamma_{\nu+\rho} = k_{\nu+\rho} x_{\nu+\rho} + k_{\nu+\rho} \frac{\partial \varphi(0, 0, \dots, 0, t_1, \dots, t_{p-\nu})}{\partial t_\rho}, \quad (\rho = 1, 2, \dots, p-\nu),$$

$$\Theta'(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p-1}) = \sum_{m_1, \dots, m_{p-1} = -\infty}^{m_1, \dots, m_{p-1} = +\infty} e^{m_1 \xi_1 + \dots + m_{p-1} \xi_{p-1} + \varphi(m_1, \dots, m_\nu, k_{\nu+1} m_{\nu+1}, \dots, k_{p-1} m_{p-1}, 0),}$$

l'on obtient, comme précédemment, la formule de réduction

$$(24) \left\{ \begin{aligned} & \theta(x_1, x_2, \dots, x_p | a_{ij}) \\ & = \sum_{t_p} e^{\gamma \theta'}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{p-1}) \\ & \quad \times \theta_3[\gamma_{v+1} + \gamma_{v+2} + \dots + \gamma_p | 2\pi\sqrt{-1}, 2\varphi(0, 0, \dots, 0, k_{v+1}, \dots, k_p)]. \end{aligned} \right.$$

Ici encore l'on a, en négligeant un multiple de  $2\pi\sqrt{-1}$ ,

$$2\varphi(0, 0, \dots, 0, k_{v+1}, k_{v+2}, \dots, k_p) \equiv k_p \frac{\partial \varphi(0, 0, \dots, k_{v+1}, k_{v+2}, \dots, k_p)}{\partial k_p}.$$


---