BULLETIN DE LA S. M. F.

H. LEMONNIER

Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à n variables indépendantes

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 223-249
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__223_1>

Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à n variables indépendantes; par M. H. LEMONNIER (¹).

(Séance du 21 juillet 1882.)

1. Étant donnée l'équation

$$f(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots (p_n)) = 0, \tag{1}$$

où $x_1, \ldots, x_n$ désignent n variables indépendantes, et x une fonc-

(¹) L'auteur de ce travail vient d'être inopinément enlevé à la Science, à sa tion de ces variables ayant $p_1, \ldots, p_n$ pour dérivées partielles par rapport à elles, nous nous proposons d'en obtenir une intégrale complète.

L'équation

$$F(x, x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{2}$$

sera une intégrale de (1) lorsque par la substitution de toute valeur de x qui en provient et des dérivées partielles correspondantes, dans cette équation (1), on obtient une identité, sans attribuer de valeurs particulières à $x_1, \ldots, x_n$, ni à des constantes arbitraires pouvant figurer dans F, étrangères à f.

Soit posé

$$df = X\,dx + X_1\,dx_1 + \ldots + X_n\,dx_n + P_1\,dp_1 + \ldots + P_n\,dp_n. \tag{3}$$

Tant que dans le facteur f on considère $x, p_1, \ldots, p_n$ comme dues à l'équation (2), les dérivées partielles de f par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$ sont nulles séparément.

On a donc

$$X_i + Xp_i + P_1\frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \ldots + P_n\frac{\partial p_n}{\partial x_i} = 0, \tag{4}$$

i variant de 1 à n.

En raison des égalités

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial p_n}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_n},$$

c'est avoir

$$X_i + Xp_i + P_1\frac{\partial p_i}{\partial x_1} + \ldots + P_n\frac{\partial p_i}{\partial x_n} = 0; \tag{4'}$$

mais de

$$dp_i = \frac{\partial p_i}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial p_i}{\partial x_n}dx_n$$

on tire

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\partial x_i}\left(\partial p_i - \frac{\partial p_i}{\partial x_1}dx_1 - \ldots - \frac{\partial p_i}{\partial x_{i-1}}dx_{i-1} - \frac{\partial p_i}{\partial x_{i+1}}dx_{i+1} - \frac{\partial p_i}{\partial x_n}dx_n\right),$$

---

famille et à ses amis. Le 27 octobre dernier, cet homme de bien, ce savant aussi modeste qu'il était distingué, ce professeur de mérite que tant de travaux désignaient pour une situation plus brillante, est mort à Caen des suites d'une chute qu'il avait faite quelques jours auparavant. La Société mathématique de France perd en lui un membre actif et dévoué, dont le Conseil a plus d'une fois apprécié les lumières; quelques-uns de ses membres regrettent un ami sincère et éclairé. Puisse ce dernier hommage adoucir les regrets d'une famille si éprouvée! H. P.

ce qui, substitué dans $(4')$, change la relation en

$$(4'')\quad\left\{\begin{aligned}&(X_i+Xp_i)\,dx_i+P_i\,dp_i+(P_1\,dx_i-P_i\,dx_1)\frac{\partial p_i}{\partial x_i}+\ldots\\&\quad+(P_{i-1}\,dx_i-P_i\,dx_{i-1})\frac{\partial p_i}{\partial x_{i-1}}\\&\quad+(P_{i+1}\,dx_i-P_i\,dx_{i+1})\frac{\partial p_i}{\partial x_{i+1}}+\ldots+(P_n\,dx_i-P_i\,dx_n)\frac{\partial p_i}{\partial x_n}=0.\end{aligned}\right.$$

Si actuellement, au lieu d'estimer indépendantes les unes des autres les valeurs de $x_1, \ldots, x_n$, nous les lions par les $n-1$ relations

$$(5)\qquad \frac{dx_i}{P_i}=\frac{dx_1}{P_1}=\ldots=\frac{dx_{i-1}}{P_{i-1}}=\frac{dx_{i+1}}{P_{i+1}}=\ldots=\frac{dx_n}{P_n},$$

l'équation $(4'')$ se réduit à

$$\frac{dx_i}{P_i}=\frac{-dp_i}{X_i+Xp_i},$$

de sorte que l'on a

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\ldots=\frac{dx_i}{P_i}=\ldots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{-dp_i}{X_i+Xp_i};$$

et cela s'appliquant à toutes les valeurs de i depuis 1 jusqu'à n, il s'ensuit

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\ldots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{-dp_1}{X_1+Xp_1}=\frac{-dp_2}{X_2+Xp_2}=\ldots=\frac{-dp_n}{X_n+Xp_n}.$$

En tenant compte de ce que par l'équation (2) l'on a

$$(6)\qquad dx=p_1\,dx_1+p_2\,dx_2+\ldots+p_n\,dx_n,$$

le système de ces équations est finalement

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\ldots=\frac{dx_n}{P_n}\\&=\frac{dx}{P_1p_1+\ldots+P_np_n}=\frac{-dp_1}{X_1+Xp_1}=\ldots=\frac{-dp_n}{X_n+Xp_n}.\end{aligned}\right.$$

Ainsi, du moment que l'équation (1) est vérifiée par l'équation (2), toute valeur de x tirée de cette équation (2) et les valeurs de p_i correspondantes satisfont au système d'équations différentielles (7), avec des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui, au lieu de rester indépendantes, soient liées entre elles par $n-1$ relations faisant partie de ce système (7).

2. Considérons en lui-même le système (8). L'intégration complète de ce système, soit qu'elle s'étende à toutes valeurs réelles et imaginaires de l'une des variables, soit qu'elle doive se limiter à tels ou tels champs de valeurs, fournira $2n$ équations avec $2n$ constantes arbitraires $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ susceptibles de se déterminer, de façon que pour une valeur attribuée arbitrairement à l'une des variables, à x par exemple, au moins dans un champ de valeurs possibles, on obtienne pour x, $x_2, \ldots; x_n, p_1, \ldots, p_n$ des valeurs pareillement arbitraires $x_0, x_{20}, \ldots, x_{n0}; p_{10}, \ldots, p_{n0}$.

Il est à remarquer que les équations (7), en même temps qu'elles impliquent la relation (6), donnent

$$\mathrm{X}\,dx + \mathrm{X}_1\,dx_1 + \ldots + \mathrm{X}_n\,dx_n + \mathrm{P}_1\,dp_1 + \ldots + \mathrm{P}_n\,dp_n = 0,$$

c'est-à-dire $df = 0$, ou $f = \text{const.}$

C'est-à-dire que les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n$ en fonction de x_1, par exemple, substituées dans f, en font une constante.

En égalant le résultat à zéro, on établira une relation entre ces constantes; l'une d'elles s'ensuivra en fonction des autres; leur nombre sera réduit à $n-1$ et l'équation (1) deviendra l'une des équations intégrales.

Pour qu'il en soit ainsi, il suffira du reste, dans le cours de l'intégration, de faire de $f = 0$ l'une des équations intégrales; le nombre des constantes arbitraires se trouvera être $n-1$ dans le système intégral. Mais si, pour $x_1 = x_{10}$, les constantes sont alors $x_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}; p_{10}, \ldots, p_{n0}$, ce sera sous la réserve d'avoir $f(x_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}; p_{10}, \ldots, p_{n0}) = 0$.

Dans son beau et renommé Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles, M. Darboux a tiré un heureux parti de l'introduction d'une nouvelle variable t dans le système (7). Suivant son inspiration, prenons pour ce système

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{\mathrm{P}_1} = \ldots = \dfrac{dx_n}{\mathrm{P}_n} \\ \quad = \dfrac{dx}{\mathrm{P}_1 p_1 + \ldots + \mathrm{P}_n p_n} = \dfrac{-dp_1}{\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}p_1} = \ldots = \dfrac{-dp_n}{\mathrm{X}_n + \mathrm{X}p_n} = \dfrac{dt}{\mathrm{T}}. \end{cases}$$

T se prenant à volonté, fonction de t seul, ou de t et des autres variables.

Nous aurons par là $2n+2$ variables; $2n+1$ d'entre elles seront déterminées en fonction de la $(2n+2)^{\text{ième}}$, par exemple, $x, x_1, \ldots, x_n$; $p, \ldots, p_n$ en fonction de t; dans le système intégral, comprenant ou impliquant l'équation (1), il y aura $2n$ constantes qui, il est bon de le redire, seront susceptibles de se remplacer pour $t = t_0$ par $x_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}, p_{10}, \ldots, p_{n0}$ sous la condition d'avoir

$$f(x_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}; p_{10}, \ldots, p_{n0}).$$

Les choses ainsi entendues, considérons le système intégral sous la forme

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}), \\ x_1 = \varphi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \varphi_n(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}), \\ p_1 = \varphi_{n+1}(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_n = \varphi_{2n}(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}), \end{array} \right.$$

Si les n constantes $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{2n}$ peuvent là s'exprimer en fonction de $x_1, \ldots, x_n$ par les n équations qui suivent la première, ce qui exigera qu'on ait le déterminant fonctionnel

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \alpha_{n+1}} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \alpha_{n+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \alpha_{2n}} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \alpha_{2n}} \end{vmatrix}$$

différent de zéro, on aura, en portant leurs valeurs dans la première équation,

$$(9) \qquad x = \Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n);$$

d'où résulte

$$(10) \qquad dx = \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt + \varpi_1 dx_1 + \ldots + \varpi_n dx_n,$$

ϖ_i désignant $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}$, et de là, à cause de (6),

$$(11) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt = (p_1 - \varpi_1) dx_1 + \ldots + (p_n - \varpi_n) dx_n.$$

Les valeurs des ϖ_i qui se présentent d'abord en fonction de t, $x_1, \ldots, x_n$ et des constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, peuvent, eu égard aux équations (8), se concevoir exprimées en fonction de t et des $2n$ constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$. Si alors les binômes $p_i - \varpi_i$ sont nuls identiquement, on voit que, $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ l'étant aussi, la variable t ne figurera pas explicitement dans l'équation (9).

Désignons par α l'une quelconque des $2n$ constantes dans le système intégral (8). Si on lui attribue une variation $\delta\alpha$, ces équations donneront

$$\delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\,\delta\alpha, \quad \delta x_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}\,\delta\alpha, \quad \ldots, \quad \delta x_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \alpha}\,\delta\alpha,$$

et par l'équation (9) on aura

$$\delta x = \varpi_1\,\delta x_1 + \ldots + \varpi_n\,\delta x_n + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\,\delta\alpha. \tag{12}$$

Mais, quand α sera l'une des constantes éliminées, ou une constante que l'élimination fait disparaître sans qu'on vise à l'éliminer, cette relation (12) se réduit à

$$\delta x = \varpi_1\,\delta x_1 + \ldots + \varpi_n\,\delta x_n. \tag{13}$$

Comme l'on a

$$p_1\,\delta x_1 + p_2\,\delta x_2 + \ldots + p_n\,\delta x_n = p_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha}\,\delta\alpha + \ldots + p_n\frac{\partial \varphi_n}{\partial \alpha}\,\delta\alpha,$$

on voit, par l'équation (12), que l'on a

$$\left\{\begin{aligned} &(\varpi_1 - p_1)\,\delta x_1 + \ldots + (\varpi_n - p_n)\,\delta x_n \\ &\quad + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\,\delta\alpha = \delta\alpha\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - p_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} - p_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} - \ldots - p_n\frac{\partial \varphi_n}{\partial \alpha}\right). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Quand α est une constante qui ne subsiste pas dans l'équation (9), si les $\varpi_i - p_i$ sont nuls identiquement, il en sera de même de la fonction

$$u_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - p_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} - \ldots - p_n\frac{\partial \varphi_n}{\partial \alpha} = \frac{\partial x}{\partial \alpha} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} - \ldots - p_n\frac{\partial x_n}{\partial \alpha}.$$

Alors que les $p_i - \varpi_i$ seront tous nuls, mais que α figurera dans la fonction Φ, la dérivée partielle $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$, n'étant pas nulle identiquement, la fonction u_α ne sera pas nulle non plus identiquement.

Ces faits constatés, supposons que, pour chacune des n constantes éliminées, le déterminant Δ n'étant pas nul identiquement, on ait

$$u_\alpha = 0,$$

sans détermination de t, ni des constantes ; alors on a pour ces n constantes les n relations

$$(15) \qquad (\varpi_1 - p_1)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i} + (\varpi_2 - p_2)\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i} + \ldots + (\varpi_n - p_n)\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_i} = 0,$$

i étant susceptible des valeurs $n+1, \ldots, 2n$: ce qui, Δ étant différent de o, exige que l'on ait

$$\varpi_i - p_i = 0,$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Mais si les p_i sont de même valeur que les ϖ_i quand leurs expressions se prennent en fonction de t et des $2n$ constantes, il est à observer que si, de part et d'autre, on remplace les constantes éliminées $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{2n}$ par leurs valeurs en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, l'identité de valeurs subsistera. Par là $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n$ recouvreront leurs valeurs telles que les donne l'équation (9), valeurs qui, d'après la relation (11), ne dépendront que de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sans que t y figure.

Or l'équation (1), faisant partie du système intégral ou s'y trouvant impliquée, devient identique quand on y substitue les valeurs (9) de $x, x_1, \ldots, p_n$, quelles que soient les valeurs attribuées à t et aux $2n$ constantes. Si l'on y substitue la valeur (9) de x et celles de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ qui sont celles de $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n$, toutes fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sans que t y figure, elle se trouvera satisfaite, identiquement, sans détermination aucune, ni des constantes subsistantes, ni des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, car à la place de l'indétermination des constantes $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{2n}$ se trouvera là celle des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, puisque, par le fait seul que Δ est différent de zéro, l'ensemble des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme indéterminées est équivalent à celui des constantes $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{2n}$.

Il est donc ainsi établi que l'équation (9), si u_α est nul identiquement pour chacune des n constantes dont l'élimination conduit à l'équation (9), sans que Δ le soit, constitue, ne contenant pas t explicitement, une équation intégrale de l'équation (1).

De plus, toute constante du système intégral (8) pour laquelle u_α est différent de zéro subsiste dans l'équation (9), de sorte que c'est une intégrale complète quand les n constantes non visées dans l'élimination donnent lieu à des valeurs de u_α qui ne sont pas nulles.

Dans tous les cas où l'équation (9) est une intégrale de l'équation (1), les constantes qui y subsistent sont celles pour lesquelles l'expression u_α est différente de zéro.

Comme fonction de t, u_α est susceptible d'une expression remarquable que donne immédiatement la recherche de sa dérivée.

Observons que l'on a

$$\frac{du_\alpha}{dt} = \frac{\partial \frac{dx}{dt}}{\partial \alpha} - p_1 \frac{\partial \frac{dx_1}{dt}}{\partial \alpha} - \dots - p_n \frac{\partial \frac{dx_1}{dt}}{\partial \alpha} - \frac{dp_1}{dt}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} - \dots - \frac{dp_n}{dt}\frac{\partial x_n}{\partial \alpha},$$

$$\begin{aligned}\frac{du_\alpha}{dt} &= \frac{\partial \frac{P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n}{T}}{\partial \alpha} - p_1 \frac{\partial \frac{P_1}{T}}{d\alpha} - \dots - p_n \frac{\partial \frac{P_n}{T}}{\partial \alpha} \\ &\quad + \frac{X_1 + X p_1}{T}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \dots + \frac{X_n + X p_n}{T}\frac{\partial x_n}{\partial \alpha} \\ &= \frac{1}{T}\left(P_1 \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \dots + P_n \frac{\partial p_n}{\partial \alpha} + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \dots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha}\right) \\ &\quad + \frac{X}{T}\left(p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \dots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha}\right),\end{aligned}$$

ce qui, à cause de

$$X\frac{\partial x}{\partial \alpha} + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \dots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha} + P_1 \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \dots + P_n \frac{\partial p_n}{\partial \alpha} = 0,$$

relation qui vient de ce que, quelle que soit la constante α, l'équation $f = 0$ est impliquée dans le système intégral (9), peut se changer en

$$\frac{du_\alpha}{dt} = -\frac{X}{T}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} - p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} - \dots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha}\right) = -\frac{X}{T} u_\alpha,$$

ou

$$\frac{du_\alpha}{u_\alpha} = -\frac{X}{T},$$

$$u_\alpha = u_{\alpha_0} e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{X}{T} dt}.$$

u_{α_0} désignant ce que devient u_α pour $t = t_0$.

Il ressort de cette expression, que si, pour $t = t_0$, on a $\frac{X}{T}$ d'une valeur finie, tant que, t variant, cela continuera d'avoir lieu, la valeur de u_α ne sera pas nulle, si u_{α_0} est différent de zéro, mais qu'elle ne cessera pas d'être nulle si u_{α_0} se trouve nul.

Cette propriété est utile pour reconnaître ce qu'il en est de u_α lorsque son expression se simplifie pour une valeur particulière de t, et surtout dans le cas où les constantes sont les valeurs de $x, x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n$ répondant à une valeur particulière de t, eu égard à ce qu'on ait $f = 0$.

Si, pour $t = t_0$, les variables deviennent $x_0, x_{10}, \ldots, p_{n0}$, l'expression de $u_{p_{i0}}$ sera nulle, en ce que $\frac{\partial x_0}{\partial p_{i0}}, \frac{\partial x_{10}}{\partial p_{i0}}, \ldots, \frac{\partial x_{n0}}{\partial p_{i0}}$, se trouvent nuls. Il suffira en conséquence que les p_{i0} soient indépendants les uns des autres et que le Δ correspondant à l'ensemble des p_{i0} ne soit pas nul identiquement, pour que, par l'élimination des p_{i0} on ait une équation intégrale; cette intégrale, d'ailleurs, sera complète si les $u_{x_{i0}}$ sont tous différents de zéro : c'est le procédé connu de Jacobi.

Les constantes étant les mêmes, si l'on pose avec Cauchy $x_0 = \lambda(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$, λ indiquant une fonction arbitraire, et qu'on fasse disparaître x_0 par la substitution de λ, il s'ensuivra

$$u_{x_{i0}} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_{i0}} - p_{i0},$$

vu que

$$\frac{\partial x_{j0}}{\partial x_{i0}} = 0 \quad (j \neq i).$$

Cette valeur de $u_{x_{i0}}$ sera nulle, si p_{i0} se prend égal à $\frac{\partial \lambda}{\partial x_{i0}}$. Donc, si toutes les constantes $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ figurent dans la fonction λ et qu'à chacune il corresponde une dérivée partielle de valeur finie, on aura par la détermination des p_{i0} dont on vient de parler des u_α de valeur nulle. Quant au déterminant Δ, il se trouve égal pour $t = t_0$ à

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & . & . & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

qu'il varie avec t d'une manière continue, $\frac{X}{T}$ étant par ailleurs d'une valeur finie, on voit que l'élimination de $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ mènera à une intégrale de l'équation (1). Il ne s'y trouvera aucune des constantes arbitraires primitives. Mais, si l'on fait dépendre λ de n constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ telles qu'à leur égard les u_A soient différents de zéro, on obtiendra une intégrale complète. Notamment, si l'on pose $x_0 = A_1 x_{10} + A_2 x_{20} + \ldots + A_n x_{n0}$, il est à observer qu'il s'ensuivra, après le remplacement de x_0 et des $p_{i0} = A_i$,

$$u_{A_i} = u_{x_0} \frac{\partial x_0}{\partial A_i} = x_{i0}\, e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{X}{T}\, dt},$$

car $u_{x_0} = 1$, pour $t = t_0$, d'où une intégrale complète où les constantes seront $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

On pourra encore prendre $x_0 = \lambda(x_{10}, \ldots, x_{k0})$ avec $p_{i0} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_{i0}}$ pour $i = 1, \ldots, k$; on aura $u_\alpha = 0$ pour $\alpha = x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{k0}$; $p_{k+1,0}, \ldots, p_{n0}$. L'élimination de ces constantes conduira à une intégrale qui dépendra de constantes introduites dans λ, si les u_α à leur égard ne sont pas de valeur nulle.

4. Je ne m'arrête pas sur des cas particuliers, comme celui où l'équation (1) est linéaire, ni celui où elle est homogène par rapport aux p_i, ni sur le cas de deux variables indépendantes.

Dans l'intégration du système (7), il se peut qu'il soit avantageux, pour les calculs, d'introduire d'autres constantes que les x_{i0} et p_{i0}. Revenons donc aux équations (8) où les constantes sont désignées par $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$.

Quand les u_α se trouvaient nuls pour n de ces constantes, et différents de zéro pour les n autres, nous avons reconnu que l'élimination des premières pour les $n+1$ équations donnant $x, x_1, \ldots, x_n$, en fonction de t et des constantes, menait à une intégrale complète.

Dans les cas où il y a plus de n constantes pour lesquelles l'expression de u_α est nulle, sans qu'il en soit ainsi pour toutes, il est aisé d'opérer sur les constantes un changement qui fait rentrer dans le cas précédent.

Supposons qu'on ait

$$u_{\alpha_1} = 0, \quad u_{\alpha_2} = 0, \quad \ldots, \quad u_{\alpha_k} = 0, \quad u_{\alpha_{k+1}} \neq 0.$$

Si l'on fait

$$\alpha_{k+1} = A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_k\alpha_k + A_{k+1},$$

il s'ensuivra, après substitution de cette valeur,

$$\begin{aligned} v_{\alpha_1} &= u_{\alpha_1} + u_{\alpha_{+1}} A = u_{\alpha_{k+1}} A_1 \neq 0 \\ v_{\alpha_2} &= u_{\alpha_{k+1}} A_2 \neq 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_k &= u_{\alpha_{k+1}} A_k \neq 0, \end{aligned}$$

et

$$v_{A_i} = u_{\alpha_{k+1}} \alpha_i \neq 0.$$

On voit que de cette façon on obtient à la place des u_α nuls autant de v_α correspondants qui ne le sont plus, se rapportant aux mêmes constantes. Quant à la constante pour laquelle u_α n'est pas nul, elle disparaît, mais peut se considérer comme remplacée par A_{k+1} ou l'un des coefficients A_i, en lui laissant une valeur indéterminée, les autres pouvant recevoir à volonté des valeurs numériques différentes de zéro.

Par ce moyen, on pourra réduire à n, s'il est supérieur, le nombre des constantes donnant des u_α nuls, pourvu qu'il s'en trouve un qui soit différent de zéro, ce qui permettra d'obtenir une intégrale complète.

S'il arrive que les valeurs de u_α répondant à deux constantes α_1, α_2 soient différentes de zéro, mais dans un rapport k indépendant de t et de ces constantes, de sorte que $u_{\alpha_2} = k u_{\alpha_1}$, il suffira de faire $\alpha_1 = -k\alpha_2 + A_1$ pour qu'il s'ensuive $v_{\alpha_2} = u_{\alpha_2} - k u_{\alpha_1} = 0$, et d'autre part $v_{A_1} = u_{\alpha_1} \neq 0$; de sorte que, à la place de α_1 se trouvera A_1 donnant pareillement un u_α différent de zéro, tandis que u_{α_2} sera remplacé par v_{α_2} égal à zéro.

Il se peut qu'en opérant ainsi une ou plusieurs fois on amène n constantes à présenter des u_α nuls, au lieu d'en avoir un moindre nombre.

A défaut de pareilles circonstances, s'il se trouve que le nombre des u_α nuls n'atteigne pas n, une ressource toujours possible sera de passer des constantes α à d'autres qui soient pour $t = t_0$ les valeurs $x_0, x_{i0}, \ldots, p_{i0}$ pour agir ensuite de l'une des façons indiquées.

5. Quand le système (7) s'intègre sans y introduire une nou-

velle variable t, qu'on y prend x_1, par exemple, pour variable indépendante, les constantes ne sont plus qu'au nombre de $2n - 1$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n-1}$ susceptibles de se changer, pour $x = x_{10}$, en valeurs correspondantes $x_0, x_{20}, \ldots, x_{n0}; p_{10}, \ldots, p_{n0}$ qui, de fait, se réduisent à $2n - 1$ à cause de la condition

$$f(x_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}; p_{10}, \ldots, p_{n0}) = 0,$$

x_{10}, comme t_0, pouvant d'ailleurs être fixé numériquement, ou laissé indéterminé.

L'analyse précédente s'appliquera à ces circonstances, t n'étant qu'à remplacer par x_1, T par P_1. On aura alors

$$u_\alpha = \frac{\partial x}{\partial \alpha} - p_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} - \ldots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_2}{\partial \alpha_{n+1}} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \alpha_{n+1}} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \alpha_{2n-1}} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \alpha_{2n-1}} \end{vmatrix},$$

puis

$$u_\alpha = u_{\alpha_0} e^{-\int \frac{X}{P_1} dx_1}.$$

Toutefois l'équation (9), indépendante de A quand les $p_i - \varpi_i$ sont nuls, ne sera pas indépendante forcément de x_1.

II.

1. Comme problème inverse de celui dont nous venons de nous occuper, se présente la question d'obtenir au moyen d'une intégrale complète de l'équation (1) un système intégral correspondant des équations (7).

La solution est immédiate lorsque l'intégrale complète connue est sous la forme

$$F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n; x_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) = 0,$$

les $x_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}$ étant tous des indéterminées.

En effet, si le système intégral se suppose sous une forme analogue, soit que la variable indépendante s'y trouve x_k ou y soit t, la condition d'avoir $f(x_0, x_{10}, \ldots, p_{n0}) = 0$ étant remplie, les équations qui le composeront, comme toutes celles qu'on en déduirait, seront telles qu'elles subsisteront, quand un échange s'y opérera entre t,

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ p_1,\ \ldots,\ p_n \quad \text{et} \quad t_0,\ x_0,\ x_{10},\ \ldots,\ x_{n0};\ p_{10},\ \ldots,\ p_{n0}.$$

Soit

$$F(x,\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ x_0,\ x_{10},\ \ldots,\ x_{n0}) = 0$$

l'intégrale complète.

Elle donnera les n équations

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \tag{17}$$

qui feront partie du système intégral. Dès lors il y aura comme correspondantes les n équations

$$\frac{\partial F}{\partial x_{i0}} + p_{i0} \frac{\partial F}{\partial x_0} = 0, \tag{18}$$

où les p_{i0} constitueront $n - 1$ constantes arbitraires, l'une d'elles se déterminant par l'équation

$$f(x_0,\ x_{10},\ \ldots,\ x_{n0},\ p_{10},\ \ldots,\ p_{n0}) = 0.$$

Il y a bien lieu d'observer que par $F = 0$ et les n équations (17) on peut obtenir l'équation (1), et par $F = 0$ avec les équations (18) obtenir $f(x_0,\ x_{10},\ \ldots\ p_{n0}) = 0$. Il n'y aura de fait qu'un système de $2n$ équations distinctes comprenant ou impliquant $f = 0$, qui constituera un système intégral avec $2n - 1$ constantes arbitraires des équations (7), correspondant bien à l'intégrale complète connue.

Considérons ces équations sous la forme

$$F = 0,\ \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{-1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{p_1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{p_2} = \cdots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{p_n}, \tag{19}$$

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x_0}}{-1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{10}}}{p_{10}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{20}}}{p_{20}} = \cdots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{n0}}}{p_{n0}}, \tag{20}$$

et soit, en supposant x_1 la variable indépendante,

$$u_i = \frac{\partial x}{\partial x_{i0}} - p_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{i0}} - p_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_{i0}} - \cdots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{i0}} \quad (i = 2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

D'après ce qui a été vu, on aura

$$u_i = u_{i0}\, e^{-\int_{x_{10}}^{x_1} \frac{X}{P_1} dx_1} = u_{i0} M,$$

supposé $\frac{X}{P_1}$ de valeur finie dans tout le cours de l'intégration.

Comme la valeur de u_{i0} se réduit à $-p_{i0}$, on a

$$u_i = -p_{i0} M,$$

et, par suite,

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x_0}}{M} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{10}}}{-p_{10} M} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{20}}}{u_2} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{30}}}{u_3} = \ldots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{n0}}}{u_n},$$

mais les deux premiers dénominateurs ne sont eux-mêmes que les expressions

$$u_0 = \frac{\partial x}{\partial x_0} - p_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_0} - \ldots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_0},$$

$$u_1 = \frac{\partial x}{\partial x_{10}} - p_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{10}} - \ldots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{10}}.$$

En effet, pour $x_1 = x_{10}$, l'expression de u_0 devient 1, de sorte que $u_0 = M$.

Pour ce qui concerne u_1, attendu que x_1 est la variable indépendante, le fait n'est pas aussi apparent.

Remontons, afin de le reconnaître, aux équations intégrales sous la forme

$$x \;= \varphi\;(x_1, x_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}; p_{10}, \ldots, p_{n0}),$$

$$x_2 = \varphi_2\,(x_1, x_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}; p_{10}, \ldots, p_{n0}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_n = \varphi_n(x_1, x_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}; p_{10}, \ldots, p_{n0}),$$

qui donnent

$$\frac{\partial x}{\partial x_{10}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{10}}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial x_{10}} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{10}}, \quad \ldots,$$

puisque, pour $x_1 = x_{10}$, les valeurs de $x, x_2, \ldots, x_n$ se réduisent à $x_0, x_{20}, \ldots, x_{n0}$, quantités indépendantes de x_{10}; il s'ensuit

$$0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)_{x_1 = x_{10}} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_{10}}\right)_{x_1 = x_{10}}$$

$$= \left(\frac{P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n}{P_1}\right)_{x_1 = x_{10}} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_{10}}\right)_{x_1 = x_{10}},$$

$$0 = \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)_{x_1 = x_{10}} + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{10}}\right)_{x_1 = x_{10}} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)_{x_1 = x_{10}} + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{10}}\right)_{x_1 = x_{10}};$$

d'où résulte

$$p_{10} + u_{10} = 0,$$

et de là

$$u_1 = -p_{10}M.$$

Par conséquent

$$(20')\qquad \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_0}}{u_0} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_{10}}}{u_1} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_{20}}}{u_2} = \dots = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_{n0}}}{u_n},$$

pour les équations (20) sous une autre forme.

2. Au reste, du moment que l'équation

$$F(x, x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$$

est une équation intégrale de l'équation (1) déduite du système des équations (7), elle devient identique quand on y porte à la place de $x_1, x_2, \dots, x_n$ leurs valeurs en fonction de x, et des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-1}$, de sorte que l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0,$$

ce qui, avec les équations

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

donne

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} - p_2\frac{\partial x_2}{\partial \alpha} - \dots - p_n\frac{\partial x_n}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0,$$

ou

$$(21)\qquad \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{-1} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}}{u_\alpha}.$$

Pour les constantes $x_0, x_{20}, \dots, x_{n0}$, cette relation se traduit en

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{-1} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_0}}{u_0} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_{20}}}{u_2} = \dots = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_{n0}}}{u_n}.$$

Comme l'on a également

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0,$$

par conséquent

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial x_1} - p_2\frac{\partial x_2}{\partial x_1} - \cdots - p_n\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0,$$

ou

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{-1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{u_{x_1}},$$

on voit que

$$(22) \qquad \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{-1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_0}}{u_0} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{u_{x_1}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{20}}}{u_2} = \cdots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{n0}}}{u_n},$$

ce qui, rapproché des formules (20′), accuse la formule

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{u_{x_1}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{10}}}{u_{x_{10}}}.$$

Pour le problème posé, le cas général, celui où dans l'intégrale complète les n constantes sont autres que celles dont il vient d'être question, demande à être traité par des considérations différentes.

3. Soit

$$(2) \qquad F(x, x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$$

une intégrale complète de l'équation (1).

Prenons-la sous la forme

$$(2') \qquad x = \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

L'équation (1) peut se supposer résolue par rapport à l'une des dérivées partielles p_i. Soit ainsi

$$(1)' \qquad p_1 = \psi(x, x_1, \ldots, x_n. p_2, \ldots, p_n).$$

Considérons avec l'équation (2)′ les n équations

$$(23) \qquad p_i = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i},$$

et posons, d'autre part,

$$(24) \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} = \beta_i,$$

les lettres β_i désignant n quantités que la suite déterminera.

Nous avons là $2n+2$ équations, qui au fond ne reviennent qu'à $2n+1$ équations distinctes, l'équation (1) résultant des équations (23) et de (2). Si les β_i deviennent des fonctions d'une variable t, elles détermineront $x, x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n$ également en fonction de t.

Le signe de différentiation d se rapportant à t, le signe δ se rapportera, peu importe de quelle façon, aux constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Nous aurons

$$dx = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n = \psi\,dx_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial x_n}\,dx_n,$$

puis

$$\begin{aligned}
\delta\,dx &= dx_1\,\delta\psi + dx_2\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial x_2} + \ldots + dx_n\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial x_n}\\
&\quad + \psi\,\delta\,dx_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\,\delta\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial x_n}\,\delta\,dx_n\\
&= dx_1\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\,\delta x_1 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\,\delta x_n + \frac{\partial\psi}{\partial p_2}\,\delta p_2 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial p_n}\,\delta p_n\right)\\
&\quad + dx_2\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial x_2} + \ldots + dx_n\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial x_n}\\
&\quad + \psi\,\delta\,dx_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\,\delta\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial\Psi}{\partial x_n}\,\delta\,dx_n
\end{aligned}$$

ce qui devient, en y portant

$$\delta x = \frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\,\delta x_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\,\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial\Psi}{\partial x_n}\,\delta x_n + \frac{\partial\Psi}{\partial \alpha_1}\,\delta\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial\Psi}{\partial \alpha_n}\,\delta\alpha_n,$$

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta\,dx = dx_1 &\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\,\delta x_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\,\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x_n}\,\delta x_n\right.\\
&\quad + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial \alpha_1}\,\delta\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial \alpha_n}\,\delta\alpha_n + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\,\delta x_1\\
&\quad \left. + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\,\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\,\delta x_n + \frac{\partial\psi}{\partial p_2}\,\delta p_2 + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial p_n}\,\delta p_n\right)\\
&+ dx_2\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial x_2} + \cdots + dx_n\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial x_n} + \psi\,\delta\,dx_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\,\delta\,dx_2 + \cdots\\
&+ \frac{\partial\Psi}{\partial x_n}\,\delta\,dx_n.
\end{aligned}\right.$$

On a, d'autre part,

$$(26)\quad\left\{\begin{aligned}\delta x &= \frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial\Psi}{\partial x_n}\delta x_n + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1}\delta\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_n}\delta\alpha_n,\\ d\,\delta x &= \frac{\partial\Psi}{\partial x_1}d\,\delta x_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}d\,\delta x_2 + \frac{\partial\Psi}{\partial x_n}d\,\delta x_n + d\,\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1}\delta\alpha_1 + \cdots\\ &\quad + d\,\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_n}\delta\alpha_n + \delta x_1\,dp_1 + \delta x_2\,dp_2 + \ldots + \delta x_n\,dp_n.\end{aligned}\right.$$

En observant que $\delta\,dx = d\,\delta x$, que

$$\psi\,\delta\,dx_1 = p_1\,\delta\,dx_1 = \frac{\partial\Psi}{\partial x_1}d\,\delta x_1,$$

que

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\delta\,dx_2 = \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}d\,\delta x_2, \ldots,$$

on déduit de là

$$(27)\quad\left\{\begin{aligned}\mathrm{o} = &\left(p_1\frac{\partial\psi}{\partial x}dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1 - dp_1\right)\delta x_1\\ &+\left(p_2\frac{\partial\psi}{\partial x}dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_1 - dp_2\right)\delta x_2 + \cdots\\ &+\left(p_n\frac{\partial\psi}{\partial x}dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_1 - dp_n\right)\delta x_n\\ &+\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_2}dx_1 + dx_2\right)\delta p_2 + \cdots + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p_n}dx_1 + dx_n\right)\delta p_n\\ &+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1}dx_1 - d\,\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_1}\right)\delta\alpha_1 + \cdots + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_n}dx_1 - d\,\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_n}\right)\delta\alpha_n.\end{aligned}\right.$$

Déterminons les $\beta_i = \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_i}$ par les n équations

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\beta_i\,dx_1 + d\beta_i = \mathrm{o};$$

il s'ensuivra

$$(28)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d\beta_i}{\beta_i} = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx_1,\\ &\beta_i = \beta_{i0}\,e^{\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx_1}{dt}dt},\end{aligned}\right.$$

ce qui introduit n constantes arbitraires $\beta_{10}, \ldots, \beta_{n0}$.

Or le signe δ est applicable à ces nouvelles constantes aussi bien qu'aux α; les valeurs de $x, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ dépendent des unes comme des autres; en conséquence, pourvu que, pour

$t = t_0$ les $2n$ constantes soient telles que $x_1, x_2, x_n, \ldots; p_1, \ldots, p_n$ puissent recevoir des valeurs quelconques, x ayant d'ailleurs une valeur correspondante fixée par l'équation (2); les variations $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n, \delta p_1, \delta p_2, \ldots, \delta p_n$ peuvent s'estimer arbitraires, ces variations répondant aux variations des $2n$ constantes.

L'équation ci-dessus a donc lieu quelles que soient ces variations; il en résulte donc

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{dx_1}{-1} = \frac{dx_2}{\frac{\partial \psi}{\partial p_2}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial \psi}{\partial p_n}} \\ & = \frac{-dp_1}{\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \psi}{\partial x}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial \psi}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial \psi}{\partial x}} \\ & = \frac{dx}{-p_1 + p_2 \frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \ldots + p_n \frac{\partial \psi}{\partial p_n}}. \end{aligned} \right.$$

4. En revenant des équations $x = \Psi$, $p_1 = p$ aux équations (1) et (2) $F = 0$, $f = 0$, on aura

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_i} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad \text{déterminé par} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_i} = 0,$$

et

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial x}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad \text{par} \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha_i} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial F}{\partial x} \beta_i = 0,$$

de sorte que, les équations de départ étant

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} & F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0, \quad f(x, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \\ & \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x} p_i = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial F}{\partial x} \beta_i = 0, \end{aligned} \right.$$

et les β_i ayant leurs valeurs données par

$$\beta_i = \beta_{i0} e^{\int_{t_0}^{t} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x_1}{\partial t} dt} = \beta_{i0} e^{-\int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial p_1} \right) dx_1} = \beta_{i0} e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{X}{P_1} dx_1},$$

on en conclut

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\dots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{dx}{P_1p_1+\dots+P_np_n}=\frac{-dp_1}{X_1+Xp_1}=\dots\\ &=\frac{-dp_n}{X_n+Xp_n}=\frac{dt}{T},\end{aligned}\right.$$

T s'y trouvant à prendre à volonté.

Le système d'équations différentielles a d'après cela pour système intégral avec $2n$ constantes arbitraires, l'équation (1) s'y trouvant impliquée, les équations précédentes (30).

Lorsque f ne contient pas x, on a $X=0$; les valeurs des β_i deviennent les β_{i0}, elles sont constantes; c'est le théorème que Jacobi a démontré directement, et auquel il a habilement ramené le cas général.

Observons que l'on a

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\beta_{10}}=\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\beta_{20}}=\dots=\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\beta_{n0}}=-\frac{\partial F}{\partial x}e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{X}{T}dt}.$$

En conséquence,

$$(31)\qquad \left\{\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{k_1}=\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{k_2}=\dots=\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{k_n},\right.$$

les rapports entre les quantités constantes $k_1, k_2, \dots, k_n$ constituent $n-1$ constantes arbitraires, et, si k_1 se prend pour valeur de β_{10}, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=-k_1\frac{\partial F}{\partial x}e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{X\,dt}{T}},$$

à prendre $T=X$; on a par là

$$(32)\qquad \frac{\partial F}{\partial x_1}=-k_1\frac{\partial F}{\partial x}e^{-(t-t_0)},$$

pour la $(2n+1)^{\text{ième}}$ équation du système intégral, les autres étant $F=0$, $\frac{\partial F}{\partial x_i}+\frac{\partial F}{\partial x}p_i=0$, et les équations (31).

Lorsque T se prendra autrement, les $2n$ équations, où de fait t ne figure pas servant à déterminer $2n$ des variables $x, x_1, \dots, x_n$, $p_1, \dots, p_n$ en fonction de l'une d'elles, il y aura entre celle-ci et

t l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = -k_1 \frac{\partial F}{\partial x} e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{X}{T} dt},$$

ou

$$L \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = L(-k_1) + L \frac{\partial F}{\partial x} - \int_{t_0}^{t} \frac{X}{T} dt,$$

ou

$$\frac{d \frac{\partial F}{\partial \alpha_1}}{\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}} - \frac{d \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial x}} + \frac{X\, dt}{T} = o,$$

équation du premier ordre.

5. Si le système (7) est considéré sans la variable auxiliaire t, les intégrales seront

$$F = o, \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial x} = o,$$

et

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}}{k_1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \alpha_2}}{k^2} = \ldots = \frac{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}}{k_n},$$

équations dont le nombre est $2n$, avec $2n - 1$ constantes arbitraires qui sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et les rapports entre $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Nous terminerons en signalant l'accord que présentent ces résultats généraux, et ce qui regarde la forme d'intégrale complète examinée d'abord.

Supposons que x_1 soit prise pour variable indépendante à l'égard du système intégral, que $x_0, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ soient les constantes arbitraires dans l'intégrale complète.

L'équation $\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} + \beta_i \frac{\partial F}{\partial x} = o$ devient alors $\frac{\partial F}{\partial x_{i0}} + \beta_i \frac{\partial F}{\partial x} = o$, et l'on a

$$(22) \qquad \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{-1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_0}}{u_0} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{10}}}{u_1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{20}}}{u_2} = \ldots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{n0}}}{u_n}$$

u_i étant

$$\frac{\partial x}{\partial x_{i0}} - p_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{i0}} - p_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_{i0}} - \ldots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{i0}};$$

d'où

$$\frac{\partial F}{\partial x_{i0}} - \frac{\beta_i}{u_0}\frac{\partial F}{\partial x_0} = 0.$$

Or $u_0 = M$ et $\beta_i = M\beta_{i0}$. Donc

$$\frac{\partial F}{\partial x_{i0}} - \beta_{i0}\frac{\partial F}{\partial x_0} = 0;$$

c'est avoir

$$\frac{\partial F}{\partial x_{i0}} + p_{i0}\frac{\partial F}{\partial x_0} = 0$$

en prenant $\beta_{i0} = -p_{i0}$.

Ajoutons que, dans le système intégral que nous venons de déduire de l'équation $F = 0$, celle-ci peut se remplacer par l'équation $f = 0$. Mais les équations (7) ne se forment que pour l'équation $f = 0$, et restent les mêmes quand à sa place on prend $f = A$, A étant une constante arbitraire. Donc il suffira de remplacer l'équation $F = 0$ par $f = A$, les autres équations restant les mêmes pour avoir le système intégral général de ces équations (7).

Il importe peut-être d'appuyer de quelques exemples l'exposé qui précède. Les trois qui suivent suffiront, je l'espère, pour confirmer les principales observations que nous avons eu à faire.

I.

1. Soit $f = pqy - pz + aq = 0$. De là

$$\frac{dx}{qy - z} = \frac{dy}{py + a} = \frac{dz}{2pqy - pz + qa} = \frac{-dp}{-p^2} = \frac{-dq}{0},$$

$$q = \alpha,\quad \frac{-p\,dx}{a\alpha} = \frac{dy}{py + a} = \frac{dz}{p\alpha y} = \frac{dp}{p^2},$$

$$\frac{dx}{a\alpha} = -\frac{dp}{p^3},\quad dy - y\frac{dp}{p} - a\frac{dp}{p^2} = 0,$$

$$x - \beta = \frac{a\alpha}{2p^2},\quad y = p\gamma - \frac{a}{2p},\quad z = \alpha y + \frac{a\alpha}{p},$$

de sorte que

$$p = \sqrt{\frac{a\alpha}{2(x-\beta)}},\quad q = \alpha,\quad y = \gamma\sqrt{\frac{a\alpha}{2(x-\beta)}} - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2(x-\beta)}{a\alpha}},$$

$$z = \alpha y + \sqrt{2a\alpha(x-\beta)}.$$

D'où

$$u_\gamma = \frac{\partial z}{\partial \gamma} - q\frac{\partial y}{\partial \gamma} = \alpha\frac{\partial y}{\partial \gamma} - \alpha\frac{\partial y}{\partial \gamma} = 0, \quad u_\alpha \neq 0, \quad u_\beta \neq 0;$$

γ est à éliminer. De là

$$(z - \alpha y)^2 = 2a\alpha(x - \beta).$$

2. Pour le problème inverse,

$$F = (x - \alpha y)^2 - 2a\alpha(x - \beta) = 0,$$
$$f = pqy - pz + aq = 0;$$

d'où

$$p(z - \alpha y) - a\alpha = 0, \quad \frac{-y(z - \alpha y) - a(x - \beta)}{k} = \frac{a\alpha}{k'},$$
$$(z - \alpha y)(q - \alpha) = 0,$$

ce qui donne

$$q = \alpha, \quad z = \alpha y + \frac{a\alpha}{p}, \quad y\frac{\alpha}{p} + x - \beta - \alpha\gamma = 0.$$

Par F l'on a

$$z - \alpha y = \sqrt{2a\alpha(x - \beta)},$$

donc

$$p = \sqrt{\frac{a\alpha}{2(x - \beta)}}, \quad y = -\sqrt{\frac{a(x - \beta)}{2\alpha}} + \gamma\sqrt{\frac{a\alpha}{2(x - \beta)}}:$$

ce sont bien les intégrales précédentes.

II.

1.
$$2z - px + qy + q^2 = 0,$$
$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{y + 2q} = \frac{dz}{-px + qy + 2q^2} = \frac{-dp}{p} = \frac{-dq}{3q},$$
$$p = \alpha x, \quad q = \beta x^3, \quad dy + y\frac{dx}{x} + 2\beta x^2 dx = 0,$$
$$y = \frac{\gamma}{x} - \frac{\beta x^3}{2}, \quad z = \frac{px}{2} - \frac{qy}{2} - \frac{q^2}{2} = \frac{\alpha - \beta\gamma}{2}x^2 - \frac{\beta^2}{4}x^6,$$
$$u_\alpha = \frac{x^2}{2}, \quad u_\beta = -\frac{\gamma}{2}x^2, \quad u_\gamma = -\frac{3}{2}\beta x^2.$$

Il n'y a aucune de ces constantes à éliminer.

Si, pour $x = x_0$, on fait

$$y = y_0, \quad z = z_0, \quad p = p_0,$$

sauf à avoir

$$p_0 = \frac{2z_0 + q_0 y_0 + q_0^2}{x_0},$$

on trouve

$$\alpha = \frac{2z_0 + q_0 y_0 + q_0^2}{x_0^2}, \quad \beta = \frac{q_0}{x_0^3}, \quad \gamma = x_0 y_0 + \frac{q_0 x_0}{2},$$

$$\alpha - \beta\gamma = \frac{4z_0 + q_0^2}{2x_0^2}.$$

De là

$$q_0 = \frac{2(xy - x_0 y_0)x_0^3}{x_0^4 - x^4},$$

et finalement

$$(zx_0^2 - z_0 x^2)(x_0^4 - x^4) = x^2 x_0^2 (xy - x_0 y_0)^2.$$

Il est plus simple d'opérer autrement. Observons que l'on a

$$u_\beta + \gamma u_\alpha = 0,$$

de sorte que, si l'on pose

$$\alpha = \gamma\beta + A,$$

il s'ensuit

$$\upsilon_\beta = u_\beta + u_\alpha \gamma = 0.$$

Substitution faite de α, il y a donc β à éliminer.

Cela donne

$$y = \frac{\gamma}{x} - \frac{\beta x^3}{2}, \quad z = \frac{Ax^2}{2} - \frac{\beta^2}{4} x^6,$$

puis

$$\left(z - \frac{Ax^2}{2}\right) + \left(y - \frac{\gamma}{x}\right)^2 = 0, \quad z = \frac{Ax^2}{2} - \left(y - \frac{\gamma}{x}\right)^2.$$

De même, comme l'on a

$$u_\gamma + 3\beta u_\alpha = 0,$$

en faisant

$$\alpha = 3\beta\gamma + A,$$

d'où

$$\upsilon_\gamma = u_\gamma + 3\beta u_\alpha = 0,$$

et en éliminant γ de

$$y = \frac{\gamma}{x} - \frac{\beta x^3}{2}, \quad z = \beta\gamma x^2 + \frac{A}{2} x^2 - \frac{\beta^2}{4} x^6,$$

on obtient pour intégrale

$$z = \beta x^3 y + \frac{\beta^2}{4} x^6 + \frac{A}{2} x^2.$$

2. *Pour le problème inverse.* — Soit

$$F = z - \frac{Ax^2}{2} + \left(y - \frac{\gamma}{x}\right)^2 = 0;$$

il s'ensuit

$$p - Ax + \frac{2\gamma}{x^2}\left(y - \frac{\gamma}{x}\right) = 0, \quad q + 2\left(y - \frac{\gamma}{x}\right) = 0,$$

$$2z - px + qy + q^2 = 0,$$

$$\frac{\frac{x^2}{2}}{K} = \frac{2\left(y - \frac{\gamma}{x}\right)\frac{1}{x}}{K'};$$

d'où

$$y = \frac{\gamma}{x} + Bx^3,$$

$$q = -2\left(y - \frac{\gamma}{x}\right) = -2Bx^3.$$

$$p = (A - 2B\gamma)x,$$

$$z = \frac{px}{2} - \frac{qy + q^2}{2} = Ax^2 - Bx^6. \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

III.

$$f = pq - px - qy - z = 0,$$

$$\frac{dx}{q - x} = \frac{dv}{p - y} = \frac{dz}{2pq - px - qy} = \frac{-dp}{-2p} = \frac{-dq}{-2q} = \frac{dz}{pq + z},$$

d'où

$$q = \alpha_1 p, \quad \frac{dz}{\alpha_1 p^2 + z} = \frac{dp}{2p}, \quad dz - z\frac{dp}{2p} - \frac{\alpha_1 p}{2} dp = 0,$$

$$dx + x\frac{dq}{2q} - \frac{dq}{2} = 0, \quad z = \alpha_2 \sqrt{p} + \frac{\alpha_1}{3} p^3,$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{q}}\left(\alpha_3 + \frac{1}{3} q^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1 p}} + \frac{\alpha_1 p}{3},$$

puis

$$y = \frac{pq - px - z}{q} = \frac{p}{3} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \sqrt{p}}$$

calculons

$$u_\alpha = \frac{\partial z}{\partial \alpha_3} - q\,\frac{\partial y}{\partial \alpha_3}.$$

D'abord

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha_3} = \left(\frac{\alpha_2}{2\sqrt{p}} + \frac{2\alpha_1 p}{3}\right)\frac{\partial p}{\partial \alpha_3},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_3} = \left(\frac{1}{3} + \frac{\alpha_3}{2\alpha_1^{\frac{3}{2}} p^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha_2}{2\alpha_1 p^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{\partial p}{\partial \alpha_3} - \frac{1}{\alpha_1^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}},$$

d'où

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha_3} - q\,\frac{\partial y}{\partial \alpha_3} = \left(\alpha_1\frac{p}{3} - \frac{\alpha_3}{2\sqrt{\alpha_1 p}}\right)\frac{\partial p}{\partial \alpha_3} + \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\alpha_1}}.$$

Mais de

$$3x\sqrt{\alpha_1 p} = (\alpha_1 p)^{\frac{3}{2}} + 3\alpha_3,$$

on tire

$$\left(\frac{3\alpha_3}{2p} - \alpha_1^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial p}{\partial \alpha_3} = 3,$$

ou

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha_3} = \frac{\sqrt{\dfrac{p}{\alpha_1}}}{\dfrac{\alpha_3}{2\sqrt{\alpha_1 p}} - \dfrac{p\alpha_1}{3}};$$

donc

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha_3} - q\,\frac{\partial y}{\partial \alpha_3} = 0.$$

Éliminons α_3 : on a

$$\frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1 p}} = x - \frac{\alpha_1 p}{3},$$

$$y = \frac{p}{3} - \frac{1}{\alpha_1}\left(x - \frac{\alpha_1 p}{3}\right) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1\sqrt{p}} = -\frac{x}{\alpha_1} + \frac{2p}{3} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1\sqrt{p}},$$

$$z = \alpha_2\sqrt{p} + \frac{\alpha_1}{3}p^2.$$

Le résultat de l'élimination de p est

$$\begin{aligned}[\alpha_2(\alpha_1 y + x)^2 + 4\alpha_1\alpha_2 z]^2 + [3\alpha_2^2(\alpha_1 y + x) + 2(\alpha_1 y + x)^2 z - \tfrac{8}{3}\alpha_1 z^2]& \\ \times [6\alpha_1\alpha_2^2 - (\alpha_1 y + x)^3 + \tfrac{4}{3}\alpha_1 z(\alpha_1 y + x)] &= 0.\end{aligned}$$

1. *Problème inverse.* — Prenons

$$y = -\frac{x}{\alpha_1} + \frac{2t^2}{3} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 t} \quad \text{ou} \quad \alpha_1 y + x - \frac{2}{3}\alpha_1 t^2 + \frac{\alpha_2}{t} = 0,$$

$$z = \alpha_2 t + \frac{\alpha_1}{3} t^4$$

ou

$$z - \alpha_2 t - \frac{\alpha_1}{3} t^4 = 0, \quad \alpha_1 y + x - \frac{2}{3}\alpha_1 t^2 + \frac{\alpha_2}{t} = 0.$$

Les équations du système intégral seront, avec celles-là,

$$p = \left(\alpha_2 + \frac{4}{3}\alpha_1 t^3\right)\frac{\partial t}{\partial x}, \quad \frac{1}{\alpha_1} = \left(\frac{4}{3}t + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 t^2}\right)\frac{\partial t}{\partial x},$$

d'où

$$\alpha_1 p = \alpha_1 t^2, \quad p = t^2,$$

$$q = \left(\alpha_2 + \frac{4}{3}\alpha_1 t^3\right)\frac{\partial t}{\partial y}, \quad 1 = \left(\frac{4}{3}t + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 t^2}\right)\frac{\partial t}{\partial y}, \quad q = \alpha_1 t^2,$$

puis

$$\frac{t^4}{3} + \frac{\left(\alpha_2 + \frac{4}{3}\alpha_1 t^3\right)\frac{\partial t}{\partial \alpha_1}}{K} = \frac{t + \left(\alpha_2 + \frac{4}{3}\alpha_1 t^3\right)\frac{\partial t}{\partial \alpha_2}}{K'},$$

avec

$$y - \frac{2}{3}t^2 + \frac{\partial t}{\partial \alpha_1}\left(-\frac{4}{3}\alpha_1 t - \frac{\alpha_2}{t^2}\right) = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial \alpha_1} = \frac{t^2\left(y - \frac{2}{3}t^2\right)}{\frac{4}{3}\alpha_1 t^3 + \alpha_2},$$

$$\frac{1}{t} + \frac{\partial t}{\partial \alpha_2}\left(-\frac{4}{3}\alpha_1 t - \frac{\alpha_2}{t^2}\right) = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial \alpha_2} = \frac{t}{\frac{4}{3}\alpha_1 t^3 + \alpha_2},$$

d'où

$$\frac{\frac{t^4}{3} + t^2\left(y - \frac{2}{3}t^2\right)}{K} = \frac{2t}{K'}, \quad y - \frac{2}{3}t^2 = -\frac{t^2}{3} + \frac{A}{t},$$

de sorte que

$$p = t^2, \quad q = \alpha_1 t^2,$$

$$z = \alpha_2 t + \frac{\alpha_1}{3} t^4,$$

$$y = \frac{t^2}{3} + \frac{A}{t},$$

$$x = \frac{1}{3}\alpha_1 t^2 - \frac{A\alpha_1 + \alpha_2}{t}. \qquad \text{C. Q. F. T.}$$