BULLETIN DE LA S. M. F.

FERDINAND VON LINDEMANN

Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini, qui touchent une courbe algébrique donnée par un contact du troisième ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 21-40

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__21_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini qui touchent une courbe algébrique donnée par un contact du troisième ordre; par M. Lindemann.

(Séance du 6 janvier 1882.)

Le problème dont nous allons nous occuper demande d'effectuer l'élimination des paramètres $\varkappa$, λ, μ, des variables homogènes x_1, x_2, x_3, des différentielles dx_1, dx_2, dx_3, des différentielles du second ordre d^2x_1, d^2x_2, d^2x_3 et des différentielles du troisième ordre d^3x_1, d^3x_2, d^3x_3, entre les équations suivantes, dans lesquelles φ, ψ, χ, ω désignent des fonctions entières et homogènes d'un même ordre et f une telle fonction d'un ordre égal ou différent, savoir :

$$\begin{aligned}
\varphi + \varkappa\psi + \lambda\chi + \mu\omega &= 0,\\
d\varphi + \varkappa d\psi + \lambda d\chi + \mu d\omega &= 0,\\
d^2\varphi + \varkappa d^2\psi + \lambda d^2\chi + \mu d^2\omega &= 0,\\
d^3\varphi + \varkappa d^3\psi + \lambda d^3\chi + \mu d^3\omega &= 0,
\end{aligned}$$

$$f = 0, \quad df = 0, \quad d^2 f = 0, \quad d^3 f = 0.$$

Pour y arriver, nous avons dû traiter d'abord, dans I et II, les cas où il ne s'agit que des différentielles du premier ou du deuxième ordre, cas pour lesquels les résultats sont déjà connus, mais nous les présenterons sous une forme nouvelle. III est consacré au problème proposé. La marche que nous allons suivre offre cet avantage qu'elle peut s'appliquer d'une façon analogue aux cas plus compliqués ; on peut, en effet, résoudre par des calculs semblables le problème relatif à un contact d'ordre γ, après avoir abordé celui qui concerne un contact d'ordre $\gamma - 1$. Le dernier paragraphe est consacré à quelques observations auxquelles donnent lieu les résultats obtenus combinés avec la loi de réciprocité de M. Brill.

M. Krey (¹) s'est aussi occupé du problème actuel; il a effectué l'élimination des différentielles et des paramètres; mais il n'est pas parvenu à séparer du résultat le facteur

$$k_x^3 = (k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)^3,$$

k_1, k_2, k_3 étant des constantes qui servent à fixer, par l'identité $k_x = 1$, les valeurs absolues des coordonnées x_1, x_2, x_3.

I. — *Contact du premier ordre.*

1. Désignons par n l'ordre de la courbe primitive, et supposons qu'elle soit représentée, en coordonnées homogènes, par l'équation

$$f = 0 \quad \text{ou} \quad f(x_1 x_2 x_3) = 0.$$

Les dérivées de f par rapport à x_1, x_2, x_3, multipliées par n, seront désignées par f_1, f_2, f_3, de sorte que

$$f_1 = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad f_2 = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad f_3 = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Notre premier problème est de déterminer les courbes d'un faisceau

$$\varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) = 0 \tag{1}$$

qui touchent la courbe primitive. A cet effet, il suffit de déterminer sur $f = 0$ les points de contact des courbes demandées; ces points sont les points de coïncidence d'une certaine correspondance qui est donnée par notre problème entre les points x et y de $f = 0$. Par chaque point y de cette dernière passe une courbe du fais-

---

(¹) *Mathematische Annalen*, t. X, p. 221 ; 1876.

ceau, donnée par l'équation

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(y) & \varphi_1(y) \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Pour $y_i = x_i$, cette équation est satisfaite identiquement; nous cherchons de tels points x sur $f = 0$, pour lesquels elle est encore satisfaite si l'on pose $y_i = x_i + dx_i$ ou

$$f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + f_3\,dx_3 = 0. \tag{2}$$

Par cette substitution, elle devient

$$\begin{vmatrix} \sum \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i}\,dx_i & \sum \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\,dx_i \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Les quantités dx_i sont déterminées par (2) et par une identité de la forme

$$k_1\,dx_1 + k_2\,dx_2 + k_3\,dx_3 = 0, \tag{3}$$

les k_i étant des constantes telles que

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 1.$$

On tire de (2) et (3)

$$\left\{\begin{aligned} \rho\,dx_1 &= f_2 k_3 - k_2 f_3, \\ \rho\,dx_2 &= f_3 k_1 - k_3 f_1, \\ \rho\,dx_3 &= f_1 k_2 - k_1 f_2. \end{aligned}\right. \tag{3a}$$

Par l'introduction de ces valeurs dans notre déterminant, et en désignant par $(\varphi\psi\chi)$ le déterminant des fonctions φ, ψ, χ, on trouve

$$\begin{vmatrix} (\varphi_0 f k) & (\varphi_1 f k) \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Il s'agit de séparer du premier membre le facteur

$$k_x = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3,$$

par lequel il doit être divisible. C'est en se servant de la notation symbolique que l'on peut effectuer cette séparation de la manière la plus facile. Faisons donc, s étant l'ordre des courbes du faisceau,

$$\varphi_0(x) = \alpha_x^s, \quad \varphi_1(x) = \beta_x^s, \quad f(x) = a_x^n,$$

d'où

$$(\varphi_0 f k) = ns.(\alpha a k)\alpha_x^{s-1} a_x^{n-1},$$
$$(\varphi_1 f k) = ns.(\beta a k)\beta_x^{s-1} a_x^{n-1}.$$

L'équation (4) devient

$$[(\alpha a k)\beta_x - (\beta a k)\alpha_x] a_x^{n-1} \alpha_x^{s-1} \beta_x^{s-1} = 0.$$

Relativement à l'expression entre crochets, nous opérons par l'identité

$$(\alpha a k)\beta_x - (\beta a k)\alpha_x = (\alpha\beta k)a_x - (\alpha\beta a)k_x.$$

Eu égard aux conditions $a_x^n = 0$, $k_x = 1$, il vient

$$(5) \qquad (a\alpha\beta) a_x^{n-1} \alpha_x^{s-1} \beta_s^{-1} = 0,$$

d'où il suit que *les points de contact cherchés sont les intersections de $f = 0$ avec la jacobienne des trois courbes $f = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$*; résultat qui est d'ailleurs connu ([1]).

II. — *Contact du deuxième ordre.*

3. Nous supposons donné un système linéaire dépendant de deux paramètres, savoir

$$(6) \qquad \varphi + \lambda\psi + \mu\chi = 0,$$

où

$$\varphi = \alpha_x^s, \quad \psi = \beta_x^s, \quad \chi = \gamma_x^s.$$

Dans notre édition des leçons de Clebsch ([2]), nous avons fait remarquer que l'équation de la courbe d'ordre s, qui appartient au système (6) et qui touche la courbe $f = 0$ en un point x, est donnée par l'équation

$$(f\psi\chi).\varphi(y) + (f\chi\varphi).\psi(y) + (f\varphi\psi).\chi(y) = 0,$$

le point variable ayant les coordonnées y_i; ou bien, en appliquant

---

([1]) *Voir* Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie,* t. I, p. 460, note; t. II, p. 171 dans la traduction de M. Benoist.

([2]) *Ibid.,* t. I, p. 456; t. II, p. 165 dans la traduction de M. Benoist.

la notation symbolique,

$$[(a\beta\gamma)\beta_x^{s-1}.\gamma_x^{s-1}.\alpha_y^s + (a\gamma\alpha)\gamma_x^{s-1}\alpha_x^{s-1}.\beta_y^s + (a\alpha\beta)\alpha_x^{s-1}\beta_x^{s-1}.\gamma_y^s]a_x^{n-1} = 0$$

Cette même formule peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} \varphi(y) & \psi(y) & \chi(y) & 0 \\ \varphi_1(x) & \psi_1(x) & \chi_1(x) & f_1(x) \\ \varphi_2(x) & \psi^2(x) & \chi_2(x) & f_2(x) \\ \varphi_3(x) & \psi_3(x) & \chi_3(x) & f_3(x) \end{vmatrix} = 0, \tag{7}$$

où nous avons posé

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{s}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \quad \psi_i(x) = \frac{1}{s}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \quad \chi_i(x) = \frac{1}{s}\frac{\partial\chi}{\partial x_i}.$$

Il est aisé de vérifier que l'équation (7) satisfait, en effet, aux conditions demandées. D'abord le premier membre s'évanouit identiquement pour $y = x$, car on a

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + x_3\varphi_3 \\ \psi(x) &= x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + x_3\psi_3 \\ \chi(x) &= x_1\chi_1 + x_2\chi_2 + x_3\chi_3 \\ f(x) &= x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = 0. \end{aligned}$$

De même, pour $y = x + dx$, l'équation (7) est satisfaite identiquement. Car si l'on en multiplie les trois dernières lignes du déterminant respectivement par x_1, x_2, x_3 et si l'on retranche la somme de ces produits de la première ligne, les termes de cette dernière deviennent, en vertu de $f = 0$,

$$d\varphi(x), \quad d\psi(x), \quad d\chi(x), \quad 0.$$

Si l'on multiplie ensuite les même lignes par dx_1, dx_2, dx_3 et si l'on retranche encore la somme de ces produits des termes de la première ligne divisés par s, ces derniers disparaissent tous en vertu de $f = 0$. La courbe représentée par (7) a donc bien un contact du premier ordre avec $f = 0$ au point x, et elle fait partie du système (6).

4. Pour trouver maintenant les points où une courbe de ce système touche la courbe $f = 0$ par un contact de deuxième ordre, nous mettons, dans l'équation (7), les quantités

$$x_i + 2dx_i + d^2x_i$$

à la place des y_i. Les équations $f = 0$, $df = 0$, $d^2 f = 0$ devant être satisfaites, les termes de la première ligne horizontale du déterminant se transforment aisément en

$$(s-1)\alpha_x^{s-2}\alpha_{dx}^2,\quad (s-1)\beta_x^{s-2}\beta_{dx}^2,\quad (s-1)\gamma_x^{s-2}\gamma_{dx}^2,\quad (n-1)a_x^{n-2}a_{dx}^2,$$

les symboles c_i étant équivalents aux symboles a_i et b_i de $f(x)$. Dans ces expressions, il faut introduire les quantités k_i à l'aide de (3); on trouve, d'après une identité connue,

$$(7^a)\quad \left\{\begin{aligned} \rho^2\alpha_{dx}^2 &= (\alpha f k)^2 = (\alpha a k)(abk)a_x^{n-1}b_x^{n-1} \\ &= \frac{1}{2}(\alpha a k)^2 a_x^{n-2}b_x^n + \frac{1}{2}(\alpha b k)^2 b_x^{n-2}a_x^n \\ &\quad - \frac{1}{2}(abk)^2\alpha_x^2 a_x^{n-2}b_x^{n-2} - \frac{1}{2}(ab\alpha)^2 a_x^{n-2}b_x^{n-2}.k_x^2 \\ &\quad + (ab\alpha)(abk)a_x^{n-2}b_x^{n-2}\alpha_x k_x. \end{aligned}\right.$$

Si l'on forme trois relations analogues en remplaçant les symboles α par β, γ, c, et si l'on transforme par elles la première ligne du déterminant, dans chaque élément de cette ligne figurent cinq termes. Les deux premiers en disparaissent à cause de $f = 0$. On peut aussi faire disparaître le troisième terme qui contient les facteurs $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$, $f(x)$ respectivement, en multipliant les trois dernières lignes du déterminant par des facteurs convenables et en ajoutant ces produits aux éléments de la première ligne.

Il ne reste donc, dans chaque élément de la première ligne, que le quatrième et le cinquième terme. Pour la quatrième colonne en particulier, ce cinquième terme est égal à

$$\begin{aligned} &(n-1)(abc)(abk)a_x^{n-2}b_x^{n-2}c_x^{n-1}k_x \\ &= \frac{n-1}{3}k_x[(abk)c_x - (ack)b_x - (cbk)a_x](abc)a_x^{n-1}b_x^{n-2}c_x^{n-2} \\ &= \frac{n-1}{3}k_x^2(abc)^2 a_x^{n-2}b_x^{n-2}c_x^{n-2}, \end{aligned}$$

de sorte que l'on a, en vertu de $f = 0$, $df = 0$

$$(7^b)\qquad \rho^2.c_x^{n-2}c_{dx}^2 = -\frac{1}{6}k_x^2(abc)^2 a_x^{n-2}b_x^{n-2}c_x^{n-2} = -\frac{1}{6}\Delta,$$

en désignant par Δ le covariant hessien de $f(x)$.

Multiplions maintenant les trois dernières lignes du déterminant respectivement par

$$(s-1)(ab)_1(abk)a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}.k_x,$$
$$(s-1)(ab)_2(abk)a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}.k_x,$$
$$(s-1)(ab)_3(abk)a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}.k_x,$$

où $(ab)_1 = a_2 b_3 - b_2 a_3, \ldots$, et retranchons les produits ainsi formés des termes de la première ligne; ceux-ci deviennent alors respectivement égaux à

$$-\frac{1}{2}(s-1)(ab\alpha)^2\,a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,\alpha_x^{s-2}\,.k_x^2,$$

$$-\frac{1}{2}(s-1)(ab\beta)^2\,a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,\beta_x^{s-2}\,.k_x^2,$$

$$-\frac{1}{2}(s-1)(ab\gamma)^2\,a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\gamma_x^{s-2}\,.k_x^2,$$

$$-\frac{1}{6}(n-1)\Delta k_x^2-(s-1)(abc)(abk)\,a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,c_x^{n-1}k_x=-\frac{n+2s-3}{6}\Delta k_x^2.$$

Par ce calcul, nous avons donc séparé du déterminant un facteur k_x^2, et les grandeurs k_i ne figurent plus dans le déterminant restant, de sorte que nous pouvons énoncer ce théorème :

Les points de la courbe $f=0$ où une courbe du réseau (6) a un contact du second ordre avec elle sont donnés par ses intersections avec une courbe d'ordre $3(n+s-3)$, savoir :

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)\mathrm{X} & \dfrac{n+2s-2}{3}\Delta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & f_3 \end{vmatrix} = 0,$$

où

$$(8^a)\qquad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi = (ab\alpha)^2 a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,\alpha_x^{s-2}, & \Psi = (ab\beta)^2 a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,\beta_x^{s-2}, \\ \mathrm{X} = (ab\gamma)^2 a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,\gamma_x^{s-2}, & \Delta = (abc)^2 a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,c_x^{n-2}. \end{array} \right.$$

5. Pour nous convaincre que notre résultat concorde bien avec celui de M. Brill ([1]), nous allons le démontrer encore d'une autre manière.

Évidemment les points cherchés de $f=0$ doivent satisfaire à

([1]) *Ueber diejenigen Curven eines Büschels, welche eine gegebene Curve zweipunktig berühren* (*Mathematische Annalen*, t. III, 1871).

l'équation

$$(9)\qquad o = \begin{vmatrix} \varphi(x) \\ \Sigma\varphi_i . dx_i \\ \Sigma\varphi_i d^2x_i + (s-1)\Sigma\Sigma\varphi_{ik}dx_i dx_k \end{vmatrix},$$

où nous n'avons écrit que les éléments de la première colonne, les autres colonnes étant de la même forme, et le déterminant devant être du troisième ordre. C'est par des transformations identiques de ce déterminant à l'aide des équations $f = o$, $df = o$, $d^2f = o$, que M. Brill a déterminé les intersections de la courbe (8) avec $f = o$ par l'équation

$$o = \frac{s-1}{2}P - (n-1)Q,$$

où

$$P = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{22} & \varphi_{33} & \varphi_{23} & \varphi_{31} & \varphi_{12} \\ \psi_{11} & \psi_{22} & \psi_{33} & \psi_{23} & \psi_{31} & \psi_{12} \\ \chi_{11} & \chi_{22} & \chi_{33} & \chi_{23} & \chi_{31} & \chi_{12} \\ 2f_1 & o & o & o & f_3 & f_2 \\ o & 2f_2 & o & f_3 & o & f_1 \\ o & o & 2f_3 & f_2 & f_1 & o \end{vmatrix},$$

$$Q = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 \end{vmatrix} . \Delta.$$

Nous aurons démontré l'identité des deux résultats, lorsque nous serons parvenus à déduire l'équation (8) immédiatement de (9). Or on a, par des transformations élémentaires,

$$\begin{vmatrix} \varphi & \psi & \chi \\ d\varphi & d\psi & d\chi \\ d^2\varphi & d^2\psi & d^2\chi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi & \psi & \chi & o & o & o \\ d\varphi & d\psi & d\chi & o & o & o \\ d^2\varphi & d^2\psi & d^2\chi & o & o & o \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & 1 & o & o \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & o & 1 & o \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & o & o & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} o & o & o & x_1 & x_2 & x_3 \\ o & o & o & dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ \varphi'' & \psi'' & \chi'' & d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & -1 & o & o \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & o & -1 & o \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & o & o & -1 \end{vmatrix},$$

si l'on pose, pour abréger,

$$\varphi'' = (s-1)\Sigma\Sigma\varphi_{ik}\,dx_i\,dx_k,$$
$$\psi'' = (s-1)\Sigma\Sigma\psi_{ik}\,dx_i\,dx_k,\quad \chi'' = (s-1)\Sigma\Sigma\chi_{ik}\,dx_i\,dx_k;$$

et, en poursuivant les transformations

$$= \frac{1}{f_1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dx_2 & dx_3 \\ \varphi'' & \psi'' & \chi'' & \Sigma f_i\,d^2x_i & d^2x_2 & d^2x_3 \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & -f_1 & 0 & 0 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & -f_2 & -1 & 0 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & -f_3 & 0 & -1 \end{vmatrix};$$

enfin, le déterminant $x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2$ étant proportionnel à f_1 (égal à σf_1),

$$= \sigma\begin{vmatrix} \varphi'' & \psi'' & \chi'' & (n-1)\Sigma\Sigma f_{ik}\,dx_i\,dx_k \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & f_3 \end{vmatrix}.$$

Par là, nous sommes en effet retombés sur l'équation (8), pourvu que l'on y ait fait la substitution

$$y_i = x_i + 2\,dx_i + d^2x_i.$$

III. — *Contact du troisième ordre.*

6. En partant des résultats obtenus précédemment, il est aisé d'établir l'équation d'une courbe d'ordre s qui fait partie d'un système trois fois infini, savoir :

$$\varphi(x) + \varkappa\psi(x) + \lambda\chi(x) + \mu\omega(x) = 0,$$

et qui touche la courbe $f(x) = 0$ en un point donné x, par un contact d'ordre 2. Cette équation est donnée, en variables y_i, par

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} \varphi(y) & \psi(y) & \chi(y) & \omega(y) & 0 \\ (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)\mathrm{X} & (s-1)\Omega & \dfrac{n+2s-3}{3}\Delta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & f_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Les quantités Φ, Ψ, X, Δ sont encore définies par (8^a), et nous avons posé

$$\Omega = (\delta ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} \delta_x^{s-2}, \quad \omega(x) = \delta_x^s.$$

Évidemment l'équation (10) est satisfaite pour $y = x$ et pour $y = x + dx$. Pour prouver qu'il en est de même pour

$$y = x + 2dx + d^2x,$$

il suffit de remarquer que, d'après les calculs achevés au n° 4, les termes de la deuxième ligne horizontale du déterminant peuvent être remplacés par

$$(s-1)\alpha_x^{s-2}\alpha_{dx}^2, \quad (s-1)\beta_x^{s-2}\beta_{dx}^2,$$
$$(s-1)\gamma_x^{s-2}\gamma_{dx}^2, \quad (s-1)\delta_x^{s-2}\delta_{dx}^2, \quad (n-1)a_x^{n-2}a_{dx}^2.$$

7. Pour trouver maintenant les points de $f = 0$ où une courbe du système proposé a avec $f = 0$ un contact du troisième ordre, il nous faut mettre $x + 3dx + 3d^2x + d^3x$ à la place de y, ou bien $d^3\varphi$, ..., à la plaee de $\varphi(y)$, ... La relation $d^3 f = 0$ ou

$$(11) \quad a_x^{n-1} a_{d^3x} + 3(n-1)a_x^{2-n} a_{dx} a_{d^2x} + (n-1)(n-2)a_x^{n-3} a_{dx}^3 = 0$$

devant être satisfaite, les cinq termes de la première ligne du déterminant (10) peuvent s'écrire

$$(12) \quad \begin{cases} 3(s-1)\alpha_x^{s-2}\alpha_{dx}\alpha_{d^2x} + (s-1)(s-2)\alpha_x^{s-3}\alpha_{dx}^3, \ \ldots, \\ 3(n-1)a_x^{n-2}a_{dx}a_{d^2x} + (n-1)(n-2)a_x^{n-2}a_{dx}^3. \end{cases}$$

De la relation (7^a), on tire, par différentiation, en multipliant d'abord par α_x^{s-2},

$$(13) \quad \begin{cases} 2\rho^2\alpha_x^{s-2}\alpha_{dx}\alpha_{d^2x} + \rho^2(s-2)\alpha_x^{s-3}\alpha_{dx}^3 + 2\rho\, d\rho\, \alpha_x^{s-2}\alpha_{dx}^2 \\ \quad = -\dfrac{s}{2}(abk)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} \alpha_x^{s-1}\alpha_{dx} \\ \qquad -(n-2)(abk)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-3} b_{dx}\alpha_x^s \\ \qquad -(n-2)(ab\alpha)^2 a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_{dx}\alpha_x^{s-2} k_x^2 \\ \qquad -\dfrac{(s-2}{2}(ab\alpha)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2}\alpha_x^{s-3}\alpha_{dx} k_x^2 \\ \qquad +(ab\alpha)(abk)a_x^{n-3} b_x^{n-2}\alpha_x^{s-2}[2(n-2)\alpha_x a_{dx} \\ \qquad\qquad + (s-1)a_x\alpha_{dx}]k_x. \end{cases}$$

Sur le quatrième et sur le dernier terme du second membre.

nous opérons par l'identité

$$(14)\qquad \rho\,\alpha_{dx} a_x = (\alpha c k) a_x = [(\alpha c a) k_x + (\alpha a k) c_x + (a c k)\alpha_x] c_x^{n-1}.$$

Il vient alors, en vertu de $f = c_x^n = 0$,

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} & 2\rho^3 \alpha_x^{s-2} \alpha_{dx} \alpha_{d^2x} + \rho^3 (s-2) \alpha_x^{s-3} \alpha_{dx}^3 + 2\rho^2 d\rho\, \alpha_x^{s-2} \alpha_{dx}^2 \\ & = \frac{s-2}{2} k_x^3 \Phi' - \frac{2n+s-6}{2} k_x^2 \Phi'' \\ & + (2n+s-5) k_x \Phi''' + (s-1) \Phi^{\text{IV}} k_x^2 + \mathrm{A}\varphi + \mathrm{B}\, d\varphi, \end{aligned}\right.$$

en désignant par A, B des quantités qui ne contiennent plus les symboles α, et en posant

$$(15^a)\qquad \left\{\begin{aligned} \Phi' &= (a b \alpha)^2 (a c \alpha) a_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-1} \alpha_x^{s-3}, \\ \Phi'' &= (a b \alpha)^2 (a c k) a_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-1} \alpha_x^{s-2}, \\ \Phi''' &= (a b \alpha)\ (a b k)(a c k) a_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-1} \alpha_x^{s-1} = \Sigma \mathrm{R}_i \varphi_i, \end{aligned}\right.$$

où

$$\mathrm{R}_i = (a b)_i (a b k)(a c k) a_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-1},$$

enfin

$$\begin{aligned} \Phi^{\text{IV}} &= (a b \alpha)(a b k)(\alpha c a) a_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-1} \alpha_x^{s-2} \\ &= (a b \alpha)[(a b \alpha)(k c a) + (a b c)(\alpha k a)] c_x \Pi \\ &= -\Phi'' + \frac{1}{2}(a b c)[(a b \alpha) c_x - (a c \alpha) b_x](\alpha k a)\Pi \\ &= -\Phi'' + \frac{1}{2}(a b c)[(a b c)\alpha_x + (c b \alpha) a_x](\alpha k a)\Pi \\ &= -\Phi'' + \frac{1}{2}(a b c)^2 (a \alpha k) a_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-2} \alpha_x^{s-1}, \end{aligned}$$

car dans le troisième terme, qui devrait figurer au second membre, les facteurs $(c b \alpha)(\alpha k a)$ peuvent être remplacés par

$$\frac{1}{3}[(c b \alpha)(\alpha k a) - (a b \alpha)(\alpha k c) - (c a \alpha)(\alpha k b)] = \frac{1}{3}(c b \alpha)(\alpha k a) = 0.$$

Ainsi le second membre de (15) devient

$$(15^b)\qquad \left\{\begin{aligned} & \frac{s-2}{2} k_x^3 \Phi' - \frac{2n+3s-8}{2} k_x^2 \Phi'' \\ & + (2n+s-5) k_x \Phi''' + \frac{s-1}{2} k_x^2 \Phi^{\text{V}} + \mathrm{B}\varphi + \mathrm{B}\, d\varphi, \end{aligned}\right.$$

où

$$(15^c)\qquad \Phi^{\text{V}} = (a b c)^2 (a \alpha k) a_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-1} \alpha_x^{s-1} = \Sigma \mathrm{S}_i \varphi_i.$$

8. Pour achever l'élimination des différentielles, il nous faut encore étudier l'expression $\alpha_x^{s-3}\alpha_{dx}^3$.

Les équations (3^a) et (7^a) donnent

$$\begin{aligned}\rho^3\alpha_x^{s-3}\alpha_{dx}^3 &= (\alpha ak)(\alpha bk)(\alpha ck)a_x^{n-1}b_x^{n-1}c_x^{n-1}\alpha_x^{s-3}\\ &= -\frac{1}{2}k_x^2.(ab\alpha)^2(\alpha ck)a_x^{n-2}b_x^{n-2}c_x^{n-1}\alpha_x^{s-3}\\ &\quad + k_x(ab\alpha)(abk)(\alpha ck)a_x^{n-2}b_x^{n-2}c_x^{n-1}\alpha_x^{s-2}\\ &\quad + A'\varphi + B'd\varphi,\end{aligned}$$

et, en appliquant, pour les deux premiers termes, encore l'identité (14)

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}\rho^3\alpha_x^{s-3}\alpha_{dx}^3 &= \frac{1}{2}k_x^3\Phi' - \frac{1}{2}k_x^2\Phi'' + k_x^2\Phi^{\text{IV}} + k_x\Phi''' + A'\varphi + B'd\varphi\\ &= \frac{1}{2}k_x^3\Phi' - \frac{3}{2}k_x^2\Phi'' + \frac{1}{2}k_x^2\Phi^{\text{V}} + k_x\Phi''' + A'\varphi + B'd\varphi.\end{aligned}\right.$$

Multiplions maintenant l'équation (15) par $\frac{3}{2}(s-1)$, et retranchons-en l'équation (16), multipliée par $\frac{1}{2}(s-1)(s-2)$, en ayant égard à l'expression (15^b) pour le second membre de (15). Ainsi nous trouvons la première des quantités (12) sous la forme suivante

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}&3\rho^3(s-1)\alpha_x^{s-2}\alpha_{dx}\alpha_{d^2x} + \rho^3(s-1)(s-2)\alpha_x^{s-3}\alpha_{dx}^3\\ &\quad = -3(s-1)\rho^2 d\rho\,\alpha_x^{s-2}\alpha_{dx}^2 + A''\varphi + B''d\varphi + \frac{(s-1)(s-2)}{2}\Phi' k_x^3\\ &\quad - \frac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\Phi'' k_x^2\\ &\quad + \frac{1}{2}(s-1)(6n+2s-13)\Phi''' k_x + \frac{1}{4}(s-1)(2s-1)\Phi^{\text{V}} k_x^2.\end{aligned}\right.$$

D'une manière analogue, on est conduit à trois autres relations qui résultent de (17), quand on y remplace le symbole α respectivement par β, γ, δ. Enfin, on peut mettre un symbole d (où $d_x^n = a_x^n$) à la place de α, pourvu que l'on mette simultanément n à la place de s. Dans ce cas, se présentent au lieu de Φ', Φ'', Φ''', Φ^{V} les formes

$$\begin{aligned}\Delta' &= (abd)^2(acd)a_x^{n-3}b_x^{n-2}c_x^{n-1}d_x^{n-3},\\ \Delta'' &= (abd)^2(ack)a_x^{n-3}b_x^{n-2}c_x^{n-1}d_x^{n-2},\\ \Delta''' &= (abd)\,(abk)(ack)a_x^{n-3}b_x^{n-2}c_x^{n-1}d_x^{n-1} = \Sigma R_i f_i,\\ \Delta^{\text{V}} &= (abc)^2(adk)a_x^{n-3}b_x^{n-2}c_x^{n-2}d_x^{n-1} = \Delta'' = \Sigma S_i f_i.\end{aligned}$$

Or il est à remarquer que Δ' s'annule identiquement et que Δ''' se réduit facilement à Δ''. En effet, Δ' change de signe, si l'on permute entre eux les symboles a et d. Quant à Δ''', nous permutons les lettres b, d et faisons usage de l'identité

$$(abk)d_x - (adk)b_x = (abd)k_x - (bdk)a_x.$$

Il vient alors

$$\Delta''' = \frac{1}{2} k_x \Delta'' - \frac{1}{2}(abd)(ack)(bdk) a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-1} d_x^{n-2}.$$

Au deuxième terme du second membre, nous pouvons remplacer, sans altérer sa valeur, les facteurs symboliques $(ack)(bdk)$ par

$$\frac{1}{3}[(ack)(bdk) - (bck)(adk) - (dck)(bak)] = \frac{1}{3}(acd)(bkk) = 0.$$

Il s'ensuit

$$\Delta''' = \frac{1}{2} k_x . \Delta''.$$

Pour la dernière des cinq quantités (12) nous avons donc, au lieu de (17), cette relation plus simple

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} & 3\rho^3(n-1)a_x^{n-2} a_{dx} a_{d^2x} + \rho^3(n-1)(n-2)a_x^{n-3} a_{dx}^3 \\ & \quad = -3(n-1)\rho^2 d\rho\, a_x^{n-2} a_{dx}^2 - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\Phi'' k_x^2. \end{aligned} \right.$$

8. Les équations précédentes, (17) et (18), nous servent à transformer les expressions (12), premiers éléments du déterminant (10) après la substitution $y = x + 3dx + 3d^2x + d^3x$. D'abord nous pouvons y omettre les termes

$$-3(s-1)\rho^2 d\rho\, \alpha_x^{s-2} \alpha_{dx}^2, \quad \ldots, \quad -3(n-1)\rho^2 d\rho\, a_x^{n-2} a_{dx}^2;$$

car, en utilisant les trois dernières lignes du déterminant, ils peuvent s'écrire de façon qu'ils deviennent, d'après les calculs du n° 4, proportionnels aux termes de la deuxième ligne. De même, nous pouvons négliger, en vertu de $f = 0$ et $df = 0$, les termes qui contiennent les facteurs φ, $d\varphi$, etc.

De plus, nous pouvons y supprimer, en vertu de la relation $\Delta''' = \Sigma R_i f_i$, les termes dans lesquels figurent les expressions

$$\Phi''' = \Sigma R_i \varphi_i, \quad \Psi''' = \Sigma R_i \psi_i, \quad X''' = \Sigma R_i \chi_i, \quad \Omega''' = \Sigma R_i \omega_i.$$

Il faut seulement retrancher en même temps, de la dernière des quantités (12), l'expression

$$\frac{1}{2}(s-1)(6n+2s-13)\Delta'''k_x = \frac{1}{4}(s-1)(6n+2s-13)\Delta''k_x.$$

Enfin, Φ^{v} étant égal à $\Sigma S_i\varphi_i$, ..., on peut y supprimer les termes

$$\frac{s-1}{4}(2s-2)\Phi^{\text{v}}.k_x^2, \quad \ldots, \quad \frac{s-1}{4}(2s-1)\Omega^{\text{v}}k_x^2,$$

pourvu qu'on retranche, du second membre de (18), le produit

$$\frac{s-1}{4}(2s-1)\Delta^{\text{v}}k_x^2 - \frac{s-1}{4}(2s-1)\Delta''k_x^2.$$

Ainsi, les éléments de la première ligne du déterminant en question se présentent sous la forme suivante

$$\frac{1}{2}(s-1)(s-2)\Phi'.k_x^3 - \frac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\Phi''.k_x^2,$$
$$\frac{1}{2}(s-1)(s-2)\Psi'.k_x^3 - \frac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\Psi''.k_x^2,$$
$$\frac{1}{2}(s-1)(s-2)\mathrm{X}'.k_x^3 - \frac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\mathrm{X}''.k_x^2,$$
$$\frac{1}{2}(s-1)(s-2)\Omega'.k_x^3 - \frac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\Omega''.k_x^2,$$
$$-\left[\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}(s-1)(3n+2s-7)\right]\Delta''.k_x^2.$$

Ici, nous avons désigné par Ψ'', X'', Ω'' ce que devient Φ'' quand on y remplace α respectivement par β, γ, δ.

Le déterminant lui-même prend donc cette valeur

$$\text{(19)} \qquad \mathrm{D} = \frac{1}{2}(s-1)(s-2)k_x^3\mathrm{A} - \frac{3}{2}k_x^2\mathrm{B},$$

où nous avons posé

$$\text{(20)} \quad \mathrm{A} = \begin{vmatrix} \Phi' & \Psi' & \mathrm{X}' & \Omega' & 0 \\ (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)\mathrm{X} & (s-1)\Omega & \dfrac{n+2s-3}{3}\Delta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & f_3 \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{B} = \begin{vmatrix} \sigma\Phi'' & \sigma\Psi'' & \sigma\mathrm{X}'' & \sigma\Omega'' & r\Delta'' \\ (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)\mathrm{X} & (s-1)\Omega & \dfrac{n+2s-3}{3}\Delta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & f_3 \end{vmatrix},$$

$$
(20^a)\qquad\left\{\begin{aligned}
\sigma &= (s-1)(n+s-3),\\
r &= \frac{1}{3}[(n-1)(n-2)+(s-1)(3n+2s-7)]\\
&= \sigma+\frac{1}{3}(n-1)(n-2)-\frac{1}{3}(s-1)(s-2)\\
&= \sigma+\frac{1}{3}(n-s)(n+s-3).
\end{aligned}\right.
$$

Il faut encore nous occuper de l'expression B pour en séparer un facteur k_x.

9. De la dernière relation entre r et σ, on tire

$$\frac{r}{\sigma} = 1+\frac{n-s}{3(s-1)} = \frac{n-2s-3}{3(s-1)}.$$

Par conséquent, il vient, à l'aide de (15^a),

$$
B = \sigma(s-1)\begin{vmatrix}
(ab\alpha)^2 & (ab\beta)^2 & (ab\gamma)^2 & (ab\delta)^2 & \frac{r}{\sigma}(abd)^2\\
(ef\alpha)^2 & (ef\beta)^2 & (ef\gamma)^2 & (ef\delta)^2 & \frac{r}{\sigma}(efd)^2\\
\alpha_1\alpha_x & \beta_1\beta_x & \gamma_1\gamma_x & \delta_1\delta_x & d_1 d_x\\
\alpha_2\alpha_x & \beta_2\beta_x & \gamma_2\gamma_x & \delta_2\delta_x & d_2 d_x\\
\alpha_3\alpha_x & \beta_3\beta_x & \gamma_3\gamma_x & \delta_3\delta_x & d_3 d_x
\end{vmatrix}(ack)b_x e_x f_x \Pi,
$$

en faisant $e_x^n = f_x^n = d_x^n = f(x)$ et

$$(20^b)\qquad \Pi = a_x^{n-3} b_x^{n-3} e_x^{n-3} f_x^{n-3} c_x^{n-1} d_x^{n-2} \alpha_x^{s-2} \beta_x^{s-2} \gamma_x^{s-2} \delta_x^{s-2}$$

Cette expression sera transformée par l'identité

$$(ack)e_x = (ace)k_x + (aek)c_x + (eck)a_x.$$

Alors on obtient une somme de trois termes. Du premier se trouve séparé le facteur k_x; le deuxième contient le facteur c_x^n et s'évanouit par conséquent; le troisième est égal, au signe près, à B, comme on le reconnaît aisément, en permutant entre elles les lettres a, e et b, f. Par suite, le premier terme de cette somme devient égal au double de la valeur de B, de sorte que

$$
(21)\qquad B = k_x\frac{\sigma(s-1)}{2}\begin{vmatrix}
(ab\alpha)^2 & (ab\beta)^2 & (ab\gamma)^2 & (ab\delta)^2 & \frac{r}{\sigma}(abd)^2\\
(ef\alpha)^2 & (ef\beta)^2 & (ef\gamma)^2 & (ef\delta)^2 & \frac{r}{\sigma}(efd)^2\\
\alpha_1\alpha_x & \beta_1\beta_x & \gamma_1\gamma_x & \delta_1\delta_x & d_1 d_x\\
\alpha_2\alpha_x & \beta_2\beta_x & \gamma_2\gamma_x & \delta_2\delta_x & d_2 d_x\\
\alpha_3\alpha_x & \beta_3\beta_x & \gamma_3\gamma_x & \delta_3\delta_x & d_3 d_x
\end{vmatrix}(ace)b_x f_x \Pi
$$

La substitution des valeurs (20) et (21) dans (19) conduit au théorème suivant, dont la démonstration était le but principal de nos recherches, savoir :

Les points où une courbe algébrique d'ordre, n, $f(x)=0$, *est touchée par une courbe d'ordre s du système linéaire*

$$\varphi(x)+\varkappa\psi(x)+\lambda\chi(x)+\mu\omega(x)=0,$$

suivant un contact du troisième ordre, sont ses points d'intersection avec la courbe

$$(s-1)(s-2)A-3B_0=0, \tag{22}$$

$B_0 k_x$ *étant égal à* B, *et* A, B *étant définis par les équations* (20) *et* (21), *dans lesquelles* r, σ *sont donnés par* (20^a), Π *par* (20^b), Φ' *par* (15^a) *et* Ψ', X', Ω' *par des formations analogues, et où l'on a posé*

$$\varphi(x)=\alpha_x^s,\quad \psi(x)=\beta_x^s,\quad \chi(x)=\gamma_x^s,\quad \omega(x)=\delta_x^s,$$

$$f(x)=a_x^n=b_x^n=c_x^n=d_x^n=e_x^n=f_x^n.$$

La courbe (22) est de l'ordre

$$4(n-3)+2n-3+4(s-2)+6=4\left[s+\frac{3}{2}(n-3)\right],$$

ce qui concorde avec une proposition générale que nous avions obtenue, par voie récurrente, dans notre édition des *Leçons de Clebsch* (¹).

IV. — *Sur la loi de réciprocité de M.* Brill.

10. Remarquons la forme sous laquelle se présente, dans (10), l'équation d'une courbe qui fait partie du système linéaire proposé et qui touche la courbe $f=0$, à un point donné x, par un contact du deuxième ordre. Cette équation peut s'écrire (en coordonnées y_i)

$$\varphi(y)D_\varphi(x)+\psi(y)D_\psi(y)+\chi(y)D_\chi(x)+\omega(y)D_\omega(x)=0, \tag{23}$$

(¹) *Loc. cit.*, t. I, p. 735; t. III de la traduction de M. Benoist, p. 95.

pourvu que $D_\varphi(x) = 0$ soit la courbe qui détermine par ses intersections avec $f = 0$ les points où celle-ci touche une courbe du système

$$\psi(y) + \lambda\chi(y) + \mu\omega(y) = 0$$

par un contact du second ordre, etc.

Par là se trouve vérifiée, pour le cas actuel, la loi générale de réciprocité, due à M. Brill, et concernant d'une part les courbes $\varphi_i = 0$ d'un système linéaire γ fois infini et, d'autre part, les courbes $\Phi_i = 0$ qui déterminent dans un système partiel $(\gamma - 1)$ fois infini, contenu dans le premier système, les courbes touchant $f = 0$ par un contact d'ordre $\gamma - 1$. En effet, on sait (¹) que la forme de l'équation (23) reste la même pour le cas général, de sorte que

$$\varphi_0(y)\,\Phi_0(x) + \varphi_1(y)\,\Phi_1(x) + \ldots + \varphi_\gamma(y)\,\Phi_\gamma(x) = 0 \tag{24}$$

est, en variables y, l'équation d'une courbe qui touche $f = 0$ au point x, par un contact d'ordre $\gamma - 1$; et j'ai démontré que cette équation donne précisément le contenu de la loi que M. Brill avait obtenue d'une autre manière (²).

Une remarque analogue a lieu à l'égard d'un système quatre fois infini

$$\varphi(x) + \varkappa\psi(x) + \lambda\chi(x) + \mu\omega(x) + \nu\vartheta(x) = 0. \tag{25}$$

Du résultat obtenu au n° 9, on déduit immédiatement que *la courbe du système* (25) *qui touche* $f = 0$ *au point* x *par un contact du troisième ordre est représentée, en variables* y, *par l'équation*

$$(s-2)P - \frac{3}{2}(n+s-3)Q = 0, \tag{26}$$

(¹) *Op. cit.*, p. 472; t. II, p. 185 dans la traduction de M. Benoist.

(²) *Mathematische Annalen*, t. IV, p. 527; 1871. Cette loi peut aussi être démontrée par l'application des intégrales abéliennes et des fonctions Θ ; *voir* mon Mémoire *Ueber eine Verallgemeinerung des Jacobi'schen Umkehrproblems der Abelschen Integrale* (*Berichte der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. Br.*, Bd. VII).

où, si $\vartheta(x) = \varepsilon_x^s$,

$$P = \begin{vmatrix} \varphi(y) & \psi(y) & \chi(y) & \omega(y) & \vartheta(y) & 0 \\ \Phi' & \Psi' & X' & \Omega' & \theta' & 0 \\ \Phi & \Psi & X & \Omega & \theta & \frac{n+2s-3}{3(s-1)}\Delta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & \vartheta_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 & \vartheta_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & \vartheta_3 & f_3 \end{vmatrix},$$

$$Q = \begin{vmatrix} \varphi(y) & \psi(y) & \chi(y) & \omega(y) & \vartheta(y) & 0 \\ (ab\alpha)^2 & (ab\beta)^2 & (ab\gamma)^2 & (ab\delta)^2 & (ab\varepsilon)^2 & \frac{n+2s-3}{3(s-1)}(abd)^2 \\ (ef\alpha)^2 & (ef\beta)^2 & (ef\gamma)^2 & (ef\delta)^2 & (ef\varepsilon)^2 & \frac{n+2s-3}{3(s-1)}(efd)^2 \\ \alpha_1\alpha_x & \beta_1\beta_x & \gamma_1\gamma_x & \delta_1\delta_x & \varepsilon_1\varepsilon_x & d_1 d_x \\ \alpha_2\alpha_x & \beta_2\beta_x & \gamma_2\gamma_x & \delta_2\delta_x & \varepsilon_2\varepsilon_x & d_2 d_x \\ \alpha_3\alpha_x & \beta_3\beta_x & \gamma_3\gamma_x & \delta_3\delta_x & \varepsilon_3\varepsilon_x & d_3 d_x \end{vmatrix} (ace)$$

$$\times (a_x e_x)^{n-3}(b_x f_x d_x)^{n-2} c_x^{n-1} (\alpha_x \beta_x \gamma_x \delta_x \varepsilon_x)^{s-2}.$$

La loi de réciprocité nous permet de plus d'énoncer, à l'égard de l'expression D dans (19) ou du premier membre de (22), la pro position suivante,

Désignons par Φ^0, Ψ^0, X^0, Ω^0 les quantités qui multiplient, dans (10), respectivement les fonctions $\varphi(y)$, $\psi(y)$, $\chi(y)$, $\omega(y)$, de sorte que, par exemple,

$$\Omega^0 = -(s-1) \begin{vmatrix} \Phi & \Psi & X & \frac{n+2s-3}{3(s-1)}\Delta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & f_3 \end{vmatrix}$$

Si l'on remplace dans Ω^0 les courbes φ, ψ, χ par Φ^0, Ψ^0, X^0, on obtient une nouvelle expression ω^0, savoir

$$\omega^0 = -(\tau-1) \begin{vmatrix} \varphi' & \psi' & \chi' & \frac{n+2\tau-3}{3(\tau-1)}\Delta \\ \Phi_1^0 & \Psi_1^0 & X_1^0 & f_1 \\ \Phi_2^0 & \Psi_2^0 & X_2^0 & f_2 \\ \Phi_3^0 & \Psi_3^0 & X_3^0 & f_3 \end{vmatrix},$$

où $\tau = 3(n+s-3)$, et en faisant $\Phi^0 = \Phi_x^\tau$, ...

$$\varphi' = (\Phi ab)^2 \Phi_x^{\tau-2} a_x^{n-2} b_x^{n-2}, \quad \psi' = (\Psi ab)^2 \Psi_x^{\tau-2} a_x^{n-2} b_x^{n-2},$$
$$\chi' = \mathrm{X}(ab)^2 \mathrm{X}_x^{\tau-2} a_x^{n-2} b_x^{n-2}, \quad \Phi_i^0 = \Phi_x^{\tau-2}\Phi_i, \quad \ldots.$$

En vertu de $f=0$, la fonction ω^0 doit être, à un facteur numérique près, égale à $\omega(x)$ multiplié par la deuxième puissance de l'expression $(s-1)(s-2)\mathrm{A} - 3\mathrm{B}_0$, qui figure au premier membre de (22).

11. A l'occasion de certaines recherches sur la théorie des correspondances, nous avons été conduit à considérer une courbe $\mathrm{M}=0$ (¹), dont les intersections avec $f=0$ jouissent de cette propriété qu'une courbe d'un système linéaire γ fois infini y a un point double tel que l'une de ses deux branches y touche la courbe $f=0$ par un contact d'ordre $\gamma-2$. L'équation de cette courbe s'obtient si l'on pose, dans l'équation (24), $x=y$ et si l'on sépare du résultat un facteur f, de sorte que

$$\varphi_0(x)\Phi_0(x) + \varphi_1(x)\Phi_1(x) + \ldots + \varphi_\gamma(x)\Phi_\gamma(x) = \mathrm{M}.f.$$

Pour les cas les plus simples, nous sommes maintenant à même d'indiquer la formation analytique de ce facteur M.

Pour $\gamma = 2$, on sait que la courbe $\mathrm{M}=0$ est la jacobienne du réseau proposé.

Pour $\gamma = 3$, il faut partir de l'équation (10). La substitution $y=x$ faite, on peut aisément transformer le déterminant de façon que les éléments de la première ligne horizontale prennent les valeurs

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad -f(x).$$

La courbe d'ordre $2n+4s-7$,

$$\begin{vmatrix} \Phi & \Psi & \mathrm{X} & \Omega \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 \end{vmatrix} = 0$$

(¹) *Op. cit.*, p. 737; t. III, p. 97 dans la traduction de M. Benoist.

détermine donc sur $f = 0$ les points où une courbe du système

$$\varphi(x) + \varkappa\psi(x) + \lambda\chi(x) + \mu\omega(x) = 0$$

a un point double tel que l'une de ses branches y touche la courbe $f = 0$ par un contact du premier ordre.

Pour $\gamma = 4$, les déterminants P et Q, qui figurent au premier membre de (26), se transforment d'une manière analogue quand on a fait $y = x$. *Les points de $f = 0$, où une courbe du système* (25) *a un point double tel que l'une de ses branches y touche la courbe $f = 0$ par un contact du deuxième ordre, sont les intersections de $f = 0$ avec la courbe*

$$(s-2)\mathrm{R} - \frac{3}{2}(n+s-3)\mathrm{S} = 0,$$

en posant

$$\mathrm{R} = \begin{vmatrix} \Phi' & \Psi' & \mathrm{X}' & \Omega' & \Theta' \\ \Phi & \Psi & \mathrm{X} & \Omega & \Theta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & \vartheta_2 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 & \vartheta_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & \vartheta_3 \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{S} = \begin{vmatrix} (ab\alpha)^2 & (ab\beta)^2 & (ab\gamma)^2 & (ab\delta)^2 & (ab\varepsilon)^2 \\ (ef\alpha)^2 & (ef\beta)^2 & (ef\gamma)^2 & (ef\delta)^2 & (ef\varepsilon)^2 \\ \alpha_1\alpha_x & \beta_1\beta_x & \gamma_1\gamma_x & \delta_1\delta_x & \varepsilon_1\varepsilon_x \\ \alpha_2\alpha_x & \beta_2\beta_x & \gamma_2\gamma_x & \delta_2\delta_x & \varepsilon_2\varepsilon_x \\ \alpha_3\alpha_x & \beta_3\beta_x & \gamma_3\gamma_x & \delta_3\delta_x & \varepsilon_3\varepsilon_x \end{vmatrix} (ace)$$

$$\times (a_x e_x)^{n-3}(b_x f_x)^{n-2} c_x^{n-1} (\alpha_x\beta_x\gamma_x\delta_x\varepsilon_x)^{s-2}.$$