G. HALPHEN

Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 162-172
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__162_1>

Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles; par M. Halphen.

(Séance du 16 juin 1882) ([1]).

1. Si l'on assigne à une courbe plane neuf points doubles donnés, on lui impose par là vingt-sept conditions. C'est précisément le nombre des conditions nécessaires pour déterminer une courbe du sixième degré. Il semble donc qu'on puisse trouver une courbe du sixième degré à neuf points doubles donnés. Il n'en est rien. Par les neuf points passe, en effet, une courbe de troisième degré : c'est cette courbe, comptant double, qui constitue l'unique solution, purement illusoire.

Néanmoins, il existe assurément des courbes *propres* du sixième degré, à neuf et même à dix points doubles. Pour de telles courbes, les neuf points ne sont donc pas susceptibles d'être pris arbitrairement. C'est la liaison entre ces points que je me propose de rechercher ici. Je donnerai ensuite la solution de quelques problèmes se rattachant au même sujet, et une généralisation concernant les courbes de degré $3m$, à neuf points multiples d'ordre m.

2. Soit $C = 0$ l'équation d'une courbe du sixième degré, à neuf points doubles. Soit aussi $A = 0$ l'équation d'une courbe du troisième degré, passant en ces mêmes neuf points. Par l'équation

---

([1]) A la fin d'un Mémoire *Sur les réseaux de courbes planes* (t. I de ce *Bulletin*, p. 129), M. Kœhler a signalé ce sujet de recherches, mais en indiquant des résultats tout à fait erronés.

$C + \lambda A^2 = 0$ se trouve représenté un faisceau de courbes du sixième degré, ayant encore les mêmes points doubles. Donc *neuf points doubles d'une courbe du sixième degré sont les points doubles d'une infinité de courbes du sixième degré.*

Ces points comptent, au moins, pour dix-huit intersections des courbes C, A. Or ce nombre dix-huit est précisément le produit des degrés 6 et 3. Par conséquent, la courbe A est unique, sans quoi la courbe C serait décomposable. Ainsi, *par les neuf points doubles d'une courbe propre du sixième degré passe une seule courbe du troisième degré.*

3. Supposons les points de A représentés, à l'ordinaire, par les arguments d'une fonction doublement périodique, un des points d'inflexion ayant l'argument zéro. Soient $u_1, \ldots, u_9$ les arguments des neuf points. Ces points, comptés deux fois, constituent l'intersection complète de C et de A. Donc le double de la somme $u_1 + \ldots + u_9$ est une période. La somme elle-même ne peut être une période; car alors la courbe A ne serait pas unique. *La somme* $u_1 + \ldots + u_9$ *est donc une des trois demi-périodes.* Telle est la relation entre les neuf points; on peut d'ailleurs lui faire revêtir diverses formes géométriques. Considérons le point de A dont l'argument u'_9 est égal à u_9 diminué de la demi-période : la somme $u_1 + \ldots + u_8 + u'_9$ est une période; ceci conduit aux énoncés suivants :

Pour que neuf points $a_1, \ldots, a_8, a_9$, appartenant à une seule courbe du troisième degré A, *soient les points doubles d'une courbe propre du sixième degré, voici la condition nécessaire et suffisante.*

Choisissez huit de ces points $a_1, \ldots, a_8$, et prenez le point a'_9 où passent toutes les courbes du troisième degré, menées par les huit premiers;

Les tangentes de la courbe A *aux points a_9 et a'_9 doivent se rencontrer sur cette même courbe* A.

Ou bien encore : *Par a'_9 menez les quatre tangentes à* A; *les quatre points de contact donnent lieu à trois couples de cordes conjuguées. Le point a_9 doit être l'intersection de deux cordes conjuguées.*

Voici maintenant une autre forme de la relation, où les neuf points figurent symétriquement :

Par les neuf points menez une courbe du quatrième degré; cette dernière rencontre A *en trois autres points. Il existe une conique touchant* A *en ces trois points.*

Réciproquement : *par les trois points de contact d'une conique et d'une courbe du troisième degré* A, *menez une courbe du quatrième degré : les neuf points où cette dernière rencontre, en outre,* A, *peuvent être pris pour les points doubles d'une courbe du sixième degré.*

Effectivement la somme des arguments des neuf points et celle des arguments des trois points font ensemble une période; si l'une d'elles est une demi-période, il en est de même pour l'autre.

4. Je vais maintenant résoudre ce problème : *Trouver le lieu du neuvième point quand les huit autres sont donnés.*

Quelques mots auparavant sur un autre lieu géométrique beaucoup plus simple : à chaque courbe A d'un faisceau du troisième degré on mène la tangente en l'un des pivots, et l'on prend le point de rencontre z de cette tangente avec A. Le lieu de ce point z est, comme on le verra aisément, une courbe du quatrième degré, ayant pour point triple le point dont il s'agit, et passant en chacun des huit autres.

J'arrive au problème proposé. Pour le résoudre, j'emploie le premier énoncé du n° 3. Les points $a_1, \ldots, a_8$ étant donnés, j'envisage le faisceau du troisième degré que ces points déterminent, et le neuvième pivot a'_9. A chaque courbe A du faisceau, je mène la tangente en a'_9, rencontrant la courbe en z; par z je mène une nouvelle tangente à A. Le point de contact de cette tangente est un point du lieu. On aura donc l'équation du lieu en éliminant le paramètre du faisceau entre l'équation de A et celle de la première polaire de z.

Désignons par a_x^3 et α_x^3 les symboles des premiers membres des équations de A et de sa hessienne. Employons la lettre y pour les coordonnés du point a'_9. Le point z est donné, comme on sait, par les deux équations

$$a_y^2 a_z = 0, \quad \alpha_y^2 \alpha_z = 0,$$

en sorte que ses coordonnées sont proportionnelles aux trois déterminants

$$a_y^2 \alpha_y^2 (a_2 \alpha_3), \quad a_y^2 \alpha_y^2 (a_3 \alpha_1), \quad a_y^2 \alpha_y^2 (a_1 \alpha_2).$$

L'équation de sa polaire est donc

$$a_y^2 \alpha_y^2 (a b \alpha) b_x^2 = 0.$$

Le premier membre est du cinquième degré par rapport aux coefficients de a_x^3, du second degré par rapport aux coordonnées x. L'élimination du paramètre entre cette équation et celle de A donne donc une équation du degré 17. On voit de plus que le lieu ainsi représenté a pour point sextuple le pivot a'_9 et pour point quintuple chacun des autres pivots. Mais il est manifeste que ce lieu se décompose en deux parties, dont l'une est le lieu de z, comptant double. Donc :

Étant donnés huit points doubles d'une courbe du sixième degré, qui doit avoir un neuvième point double, le lieu de ce dernier est une courbe du neuvième degré, sur laquelle chacun des huit points donnés est triple.

Sur chaque cubique A du faisceau se trouvent trois points du lieu. Quand cette cubique a un point double, deux de ces trois points s'y réunissent. Donc :

Le lieu passe en chacun des douze points doubles des cubiques du faisceau déterminé par les huit points.

Dans le cas particulier où les pivots sont les points d'inflexion des cubiques, le point a_9 est un point sextactique situé sur l'axe harmonique correspondant au point a'_9. Ainsi : *Quand les huit points sont les points d'inflexion d'une courbe du troisième degré, le lieu se réduit à une ligne droite.*

5. Une courbe C, du sixième degré, ayant neuf points doubles, et A étant la cubique qui passe en ces neuf points, on a les mêmes points doubles pour toute courbe du faisceau

$C + \lambda A^2 = 0$. Dans ce faisceau se trouvent comprises des courbes ayant un point double de plus. Ainsi *le lieu précédent est aussi celui du neuvième et du dixième point double des courbes unicursales du sixième degré ayant huit points doubles donnés.*

Dans le faisceau $C + \lambda A^2 = 0$ combien y a-t-il de courbes ayant un dixième point double? Pour résoudre cette question, considérons le lieu (c) du point de contact de la tangente menée à chaque courbe du faisceau par un point arbitraire c. L'existence de la courbe double A^2 réduit de trois unités la seconde caractéristique du faisceau ; elle est ainsi égale à 7, et la courbe (c) est du huitième degré. Cette courbe (c) passe en chaque pivot du faisceau ; elle s'y compose de deux branches dont l'une a pour tangente la droite qui passe en c ; l'autre tangente, au contraire, est indépendante de c ; c'est la conjuguée harmonique de la tangente de A par rapport aux deux tangentes de C. Deux courbes analogues (c), (c'), relatives à deux points différents c, c', ont ainsi cinq intersections réunies en chacun des pivots. Elles ont, en outre, en commun les sept points de contact des courbes du faisceau avec la droite cc' ; les autres points, au nombre de $8^2 - 9.5 - 7 = 12$ sont les points doubles supplémentaires des courbes du faisceau. Ainsi, *parmi les courbes du sixième degré ayant les mêmes neuf points doubles, il y en a douze qui ont un dixième point double.*

6. Je me propose de former effectivement l'équation générale des courbes du sixième degré à neuf points doubles. Je me servirai, à cet effet, de la dernière proposition énoncée au n° 3. Je prendrai une cubique A triplement tangente à une conique donnée, et je supposerai les neuf points déterminés par l'intersection de la cubique avec une courbe B, du quatrième degré, passant aux trois points de contact de A et de la conique. Le triangle de ces trois points sera le triangle de référence.

Représentant par $C = 0$ la courbe cherchée, j'envisage la ligne composée $x_1 x_2 x_3$ C. Elle a pour points doubles tous les points d'intersection de A et de B. On aura donc une identité de cette forme

$$x_1 x_2 x_3 C = \alpha B^2 - \beta AB + \gamma A^2.$$

dans laquelle α, β, γ sont des polynômes avec les degrés respectifs

1, 2, 3. Le problème consiste donc uniquement à déterminer trois pareils polynômes, de telle sorte que le second membre soit divisible par x_1, x_2, x_3. Comme la solution n'offre ainsi aucune difficulté, je donnerai seulement le résultat.

Prenons A sous cette forme

$$A = \alpha_1 x_1^2(x_2 + x_3) + \alpha_2 x_2^2(x_3 + x_1) + \alpha_3 x_3^2(x_1 + x_2) + a x_1 x_2 x_3,$$

de telle sorte que la cubique soit triplement tangente à la conique

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 0.$$

Le polynôme du 4^e degré B a pour forme générale

$$B = x_2 x_3 P + x_3 x_1 Q + x_1 x_2 R,$$

P, Q, R étant du 2^e degré. J'écrirai ces polynômes sous la forme usuelle

$$P = P_{11} x_1^2 + P_{22} x_2^2 + P_{33} x_3^2 + 2 P_{12} x_1 x_2 + 2 P_{23} x_2 x_3 + 2 P_{31} x_3 x_1,$$

et ainsi des deux autres.

Voici maintenant quels sont les polynômes α, β, γ. En raison de la symétrie des notations, je peux abréger et n'écrire qu'un seul terme de chaque type; les autres termes se déduisent par la permutation des indices 1, 2, 3, accompagnée de la permutation correspondante des lettres P, Q, R.

$$\alpha = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,$$
$$\beta = (Q_{11} + R_{11}) x_1^2 + \left(2 P_{23} + \frac{Q_{33}\alpha_2}{\alpha_3} + \frac{R_{22}\alpha_3}{\alpha_2}\right) x_2 x_3 + \ldots$$
$$\gamma = \lambda x_1 x_2 x_3 + \frac{Q_{11} R_{11}}{\alpha_1} x_1^3 + \left(2 \frac{R_{22} P_{23}}{\alpha_2} + \frac{Q_{33} P_{22}}{\alpha_3}\right) x_2^2 x_3 + \ldots.$$

Les trois polynômes sont entièrement déterminés, sauf le seul terme arbitraire $\lambda x_1 x_2 x_3$ dans γ; d'où résulte, comme il convient, que l'équation cherchée renferme le terme arbitraire λA^2.

7. Voici maintenant un cas particulier où le calcul peut être fait tout autrement, et dans lequel s'offre une circonstance intéressante. Suivant la remarque faite dans une autre occasion (1),

---

(1) Voir *Bulletin de la Société mathématique*, t. IX, p. 105.

les vingt-sept points sextactiques d'une cubique se partagent en trois groupes de neuf points : un même groupe comprend les points de contact de la cubique avec une courbe de troisième classe; la somme des arguments de ces neuf points est une demi-période. Ils peuvent donc être pris pour les points doubles d'une courbe C.

Les neuf points dont il s'agit se déduisent de l'un d'eux $x_1 = x_2 = \rho$, $x_3 = 1$ par le changement de x_1 et x_2 en ωx_1 et $\omega^2 x_2$, ω étant racine cubique de l'unité, et par la permutation des indices. Il en résulte que la courbe C reste inaltérée par ces changements, et que son équation est comprise dans la forme

$$C = a\,\Sigma\, x_1^6 + 2b\,\Sigma\, x_1^3 x_2^3 + 3c x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 6d x_1 x_2 x_3\,\Sigma\, x_1^3 = 0.$$

Il suffit de déterminer les coefficients de telle sorte que cette courbe ait le point double $x_1 = x_2 = \rho$, $x_3 = 1$; elle aura, en même temps, les huit autres. Cette détermination conduit au résultat suivant, où λ est arbitraire :

$$\begin{aligned} a &= 3(1+\lambda)\rho^4, \\ b &= -3\rho(\rho^3+1), \\ c &= \lambda(2\rho^6+6\rho^3+1)+3(2\rho^3+1), \\ d &= -\lambda\rho(\rho^3+1). \end{aligned}$$

La circonstance suivante fait l'intérêt de cet exemple. Les courbes du faisceau, douées d'un dixième point double, dégénèrent chacune en l'ensemble de trois coniques. On obtient un de ces groupes en supposant $\lambda = -1$, et l'on a alors

$$C = (x_1^2 - \rho x_2 x_3)(x_2^2 - \rho x_3 x_1)(x_3^2 - \rho x_1 x_2).$$

Les trois autres groupes se déduisent de celui-là par le changement du triangle d'inflexions. Il suffit, à cet effet, d'accentuer les lettres x, ρ et de faire successivement les substitutions suivantes, ω désignant toujours une racine cubique de l'unité :

$$\begin{array}{lll} x_1' = x_3 + \omega x_2 + \omega^2 x_1, & x_2' = x_3 + \omega^2 x_2 + \omega x_1, & x_3' = x_3 + x_1 + x_2, \\ x_1'' = \omega x_1 + x_2 + x_3, & x_2'' = x_1 + \omega x_2 + x_3, & x_3'' = x_1 + x_2 + \omega x_3, \\ x_1''' = \omega^2 x_1 + x_2 + x_3; & x_2''' = x_1 + \omega^2 x_2 + x_3; & x_3''' = x_1 + x_2 + \omega^2 x_3; \end{array}$$

$$\begin{aligned} \rho' &= 1 - \rho, \\ \rho'' &- 1 - \omega^2 \rho, \\ \rho''' &= 1 - \omega\rho. \end{aligned}$$

Dans chaque groupe, les trois coniques se coupent deux à deux en trois points, les neuf points donnés étant laissés de côté. Ces trois points sont les sommets d'un triangle d'inflexions. Les douze points doubles appartenant, d'aprèsle n° 5, aux courbes du faisceau sont ainsi les sommets des quatre triangles d'inflexions.

Ces faits s'expliquent très facilement. Chacun des neuf points considérés a pour argument celui d'un point d'inflexion, augmenté d'une demi-période h, la même pour tous. Soient 1, 2, 3 les points d'inflexion situés sur un des côtés d'un des triangles; 4, 5, 6 sur un autre côté du même triangle, et 7, 8, 9 sur le troisième côté. La somme des arguments des points correspondant à 1, 2, 3, 4, 5, 6, est une période; ces points sont donc sur une conique. De même les points qui correspondent à 4, 5, 6, 7, 8, 9 sont sur une conique, et à 7, 8, 9, 1, 2, 3 sur une troisième conique. Ainsi est composé le groupe de trois coniques correspondant à un triangle d'inflexions.

8. Pour généraliser les résultats qui précèdent, envisageons une courbe C_m, de degré $3m$, avec neuf points multiples d'ordre m. Une pareille courbe peut exister; son genre sera égal à l'unité, car on a

$$\frac{(3m-1)(3m-2)}{2} - 9\frac{m(m-1)}{2} = 1.$$

En outre, si l'on donne les neuf points, on impose ainsi des conditions au nombre de $9\frac{m(m+1)}{2}$, juste égal à celui des arbitraires qu'admet une courbe de degré $3m$. Cependant si les points sont quelconques, la courbe n'existe pas. La solution illusoire consiste en une cubique A, comptant m fois.

Pour les mêmes raisons qu'au n° 2, on voit que *les neuf points multiples d'ordre m d'une courbe de degré $3m$ sont les points multiples, de ce même ordre, d'une infinité de pareilles courbes. Il n'y passe qu'une seule courbe du troisième degré.*

Sur la cubique A, passant en ces neuf points, la somme des arguments, répétée m fois, fait une période. La somme est donc elle-même la $\mu^{\text{ième}}$ partie d'une période, μ étant un diviseur de m. Mais, si μ diffère de m, les courbes C_μ, de degré 3μ, ayant ces points pour multiples d'ordre μ, forment un faisceau, et la courbe C_m dégénère en l'ensemble de $\frac{m}{\mu}$ courbes C_μ. Donc la liaison entre les points consiste en ce que la somme de leurs arguments soit proprement la $m^{\text{ième}}$ partie d'une période.

9. Huit de ces points a_1, ..., a_8 étant donnés, si l'on prend une cubique A du faisceau qu'ils déterminent, on obtient sur cette cubique autant de points a_9 qu'il y a de solutions au problème de la division propre des périodes par le nombre m. Soit m décomposé en facteurs premiers

$$m = p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots,$$

le nombre des solutions est cette fonction arithmétique

$$\psi(m) = m^2\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{q^2}\right)\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\cdots.$$

Tel est le nombre des points mobiles où une cubique du faisceau rencontre le lieu du point a_9. Il est d'ailleurs visible que ce lieu ne passe pas au neuvième pivot a'_9, l'argument de a_9 devant différer de celui de a'_9 par une fraction de période.

Soit δ l'ordre de multiplicité de chacun des huit pivots sur le lieu de a_9. Ces huit points donnent, dans la somme des arguments des intersections de ce lieu et d'une cubique A, l'élément $\delta(u_1 + \ldots + u_8)$. Soit v l'argument de a'_9; et soient aussi $h_1, h_2, \ldots$, les $m^{\text{ièmes}}$ parties des périodes. La somme $h_1 + h_2 + \ldots$ est une période. Donc les divers points a_9 situés sur A apportent à la somme des arguments l'élément $\psi(m)v$, ou $-\psi(m)(u_1 + \ldots + u_8)$. La somme totale devant faire une période, on a $\delta = \psi(m)$.

D'autre part, si d est le degré du lieu, on aura $3d - 8\delta = \psi(m)$. Donc $d = 3\psi(m)$. Ainsi :

Étant donnés huit points multiples d'ordre m d'une courbe de degré $3m$, qui doit avoir un neuvième point multiple d'ordre m, le lieu de ce neuvième point est une courbe du degré $3\psi(m)$, sur laquelle chacun des huit points est multiple d'ordre $\psi(m)$.

Pour une cubique unicursale A, la division des périodes, au lieu d'avoir trait aux fonctions elliptiques, se rapporte aux fonctions circulaires. Le nombre des solutions est alors cette autre fonction arithmétique

$$\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\cdots$$

Les autres solutions se réunissent au point double. Par conséquent : *en chacun des douze points doubles des cubiques du faisceau déterminé par les huit points le lieu précédent a, avec la cubique, des intersections réunies au nombre de* $\psi(m) - \varphi(m)$.

Une étude plus approfondie serait sans doute nécessaire pour examiner, dans chaque cas, la nature de ces points sur ce lieu. Par exemple, pour $m = 3$, on a $\psi(m) - \varphi(m) = 6$. Eu égard aux autres points singuliers, c'en est assez pour conclure qu'en chacun des douze points la courbe a deux branches tangentes aux deux branches de la cubique.

10. Dans le faisceau $C_m + \lambda A^m = 0$ se trouvent des courbes ayant, en outre, un point double. Leur nombre se trouve par une analyse semblable à celle du n° 5. La seconde caractéristique est réduite de $3(m-1)$ unités par l'existence de la courbe multiple A^m. Elle est ainsi

$$\nu = 2(3m-1) - 3(m-1) = 3m+1.$$

Le lieu (c) des points où les courbes du faisceau sont touchées par les tangentes issues d'un point c est ainsi de degré $3m+2$. En chaque pivot, il a une tangente passant en c, et $(m-1)$ tangentes indépendantes de c. Deux pareilles courbes (c), (c'), ont, de la sorte, en chaque pivot, des intersections réunies au nombre de m^2+m-1. Le nombre des points doubles est, par conséquent

$$(3m+2)^2 - (3m+1) - 9(m^2+m-1) = 12.$$

Ainsi, *parmi les courbes de degré* $3m$, *ayant les mêmes neuf points multiples d'ordre* m, *il y en a douze qui ont, en outre, un point double.* Cet énoncé singulier s'applique aussi, comme on voit, au cas $m = 1$.

11. Le lieu du neuvième point, dont le degré est $3\psi(m)$, se simplifie notablement quand les huit points donnés sont les points d'inflexion d'une cubique. On a déjà vu, au n° 5, qu'il se réduit à une ligne droite pour $m=2$. Pour $m=3$, il cesse manifestement d'exister; les courbes C_m n'existent pas non plus. Pour les autres cas, la simplification se trouve aisément au moyen des résultats que j'ai démontrés dans un Mémoire *sur les courbes du troisième degré* (*Mathematische Annalen*, t. XV, p. 375), et voici le résultat :

Si les huit points sont les points d'inflexion d'une cubique, le degré du lieu du neuvième point se réduit à $\frac{1}{3}\psi(m)$, *au lieu de* $3\psi(m)$; *ce lieu ne passe plus en aucun des points donnés. En outre, si* m *est divisible par* 3, *le lieu se décompose en huit courbes distinctes.*

Par exemple, pour $m=9$, le lieu se compose de huit cubiques équianharmoniques dont chacune est inscrite et circonscrite à la fois à trois des triangles d'inflexions (*loc. cit.*, p. 362); pour $m=6$, il se compose de huit droites; pour $m=4$, d'une courbe du quatrième degré.