BULLETIN DE LA S. M. F.

PERRIN.

Sur une nouvelle méthode de résolution de l'équation du quatrième degré, et son application à quelques équations de degrés supérieurs

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 139-146
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__139_1>

Sur une nouvelle méthode de résolution de l'équation du quatrième degré, et son application à quelques équations de degrés supérieurs; par M. Perrin.

(Séance du 19 mai 1882.)

1. La résolution de l'équation du troisième degré, privée de son second terme

(1) $$x^3 + px + q = 0,$$

peut être considérée comme se déduisant immédiatement de l'identité évidente

$$(a+b)^3 - 3ab(a+b) - (a^3+b^3) = 0, \tag{2}$$

dans laquelle a et b sont deux quantités arbitraires.

Pour identifier (1) avec (2), il suffit, en effet, de poser

$$x = a+b, \quad p = -3ab, \quad q = -(a^3+b^3),$$

et ces trois relations montrent que, si l'on détermine a et b de telle sorte que a^3 et b^3 soient les racines de l'équation

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0,$$

et que le produit ab soit bien égal à $-\frac{p}{3}$, la valeur $x = a+b$ satisfera à l'équation (1), et fournira, par conséquent, l'expression d'une de ses racines, d'où la formule de Cardan et la règle à suivre pour associer entre elles les valeurs des deux radicaux cubiques.

2. Essayons de ramener de même la résolution de l'équation du quatrième degré, débarrassée de son second terme,

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0, \tag{3}$$

à une identité analogue à (2), c'est-à-dire dont le premier membre soit une fonction symétrique et homogène du quatrième degré de trois arbitraires a, b, c, et ne renferme que la somme $a+b+c$ d'une part, et que des fonctions symétriques de puissances semblables de a, b, c d'autre part. Cette identité devra être de la forme

$$(a+b+c)^4 + \text{A}(a+b+c)^2 + \text{B}(a+b+c) + \text{C} = 0, \tag{4}$$

où A, B, C devront être des fonctions symétriques de a, b, c respectivement du deuxième, du troisième et du quatrième degré; il est naturel, puisque le produit abc nous fournit déjà pour B une fonction du troisième degré, d'essayer de former A et C avec des fonctions symétriques de a^2, b^2, c^2, et de poser par conséquent, en désignant par λ, μ, ν, ρ quatre indéterminées *numériques*,

$$\left\{\begin{aligned} &(a+b+c)^4 + \lambda\Sigma a^2(a+b+c)^2 + \mu abc(a+b+c) \\ &\qquad + \nu(\Sigma a^2)^2 + \rho\Sigma a^2 b^2 = 0. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Pour que cette relation soit identique, c'est-à-dire vraie, quelles que soient les valeurs de a, b, c, il est nécessaire et suffisant de faire en sorte que les coefficients de a^4, a^3b, a^2b^2, a^2bc soient nuls; car, en vertu de la symétrie, tous les autres termes disparaîtront aussi d'eux-mêmes. Mais, pour annuler ces quatre coefficients, nous disposons précisément de quatre indéterminées λ, μ, ν, ρ. Écrivant donc que les quatre coefficients dont il s'agit sont nuls, nous avons, pour déterminer λ, μ, ν, ρ, les quatre équations

$$\begin{array}{ll} a^4 \ldots\ldots\ldots\ldots & 1+\lambda+\nu=0, \\ a^3b \ldots\ldots\ldots\ldots & 4+2\lambda=0, \\ a^2b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots & 6+2\lambda+2\nu+\rho=0, \\ a^2bc \ldots\ldots\ldots\ldots & 12+2\lambda+\mu=0, \end{array}$$

d'où on déduit

$$\lambda=-2, \quad \mu=-8, \quad \nu=1, \quad \rho=-4,$$

ce qui donne, pour l'identité cherchée,

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a+b+c)^4-2\Sigma a^2(a+b+c)^2 \\ \quad -8abc(a+b+c)+(\Sigma a^2)^2-4\Sigma a^2b^2=0. \end{array} \right.$$

Il ne reste plus dès lors qu'à identifier les premiers membres de (3) et de (6) en posant

$$x=a+b+c, \quad p=-2\Sigma a^2, \quad q=-8abc, \quad r=(\Sigma a^2)^2-4\Sigma a^2b^2;$$

on en conclut

$$\Sigma a^2=-\frac{p}{2}, \quad \Sigma a^2b^2=\frac{p^2-4r}{16}, \quad abc=-\frac{q}{8}.$$

Si donc on prend pour a^2, b^2, c^2 les trois racines y_1, y_2, y_3 de la résolvante

$$(7) \qquad y^3+\frac{p}{2}y^2+\frac{p^2-4r}{16}y-\frac{q^2}{64}=0,$$

$a+b+c$ ou $\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}$ sera une racine de l'équation (3), pourvu que l'on ait associé les radicaux carrés avec les signes convenables pour que leur produit donne bien $-\frac{q}{8}$; ce qui fera disparaître l'ambiguïté provenant des doubles signes et fournira seulement les quatre racines.

La résolvante (7) est précisément, à un facteur constant près, celle que donne la méthode de Lagrange appliquée à la fonction suivante des racines de (3)

$$y = x_1 + x_2 - x_3 - x_4.$$

3. Si l'on pouvait, par un moyen quelconque, former pour les degrés supérieurs au quatrième des identités analogues à (2) et (6), on pourrait sans doute en déduire la résolution d'équations correspondantes. Or, il est facile de former de telles identités soit par la méthode des coefficients indéterminés que nous venons d'employer pour obtenir l'identité (6), soit d'une manière beaucoup plus simple en utilisant les formules bien connues qui donnent les fonctions symétriques des racines d'une équation exprimées au moyen des coefficients de cette équation. Soient en effet $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n quantités arbitraires; désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ leur somme, la somme de leurs produits deux à deux, trois à trois, etc., jusqu'à leur produit $a_1 a_2 \ldots a_n$. Désignons de même par $y_1, y_2, \ldots, y_n$ la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ de ces quantités, la somme des produits deux à deux, trois à trois, etc., de ces puissances, la dernière quantité y_n étant par conséquent égale à x_n^m. On sait exprimer les $n-1$ quantités y_1, y_2, $\ldots$, y_{n-1} en fonction entière de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si entre ces $n-1$ relations on élimine $n-2$ des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, on obtiendra une relation qui ne contiendra plus que les y, avec x_n qui peut être remplacé par $\sqrt[m]{y_n}$, et celle que l'on voudra des quantités x, par exemple x_1. On aura donc une identité homogène qui contiendra les diverses puissances de x_1, c'est-à-dire de $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, multipliées par des fonctions symétriques des puissances a_1^m, $a_2^m, \ldots, a_n^m$, et, si cette identité renferme x_1 à une puissance r supérieure à n, on pourra s'en servir pour ramener la résolution d'une certaine classe d'équations de degré r à la résolution d'une équation de degré n.

Si, en particulier, on suppose $n = 2$, $m = 3$, ce procédé donne immédiatement l'identité (2); si l'on fait $n = 3$, $m = 2$, il conduit à éliminer x_2 entre les deux relations

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^2 - 2x_2, \\ y_2 &= x_2^2 - 2x_1 x_3, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$x_1^4 - 2y_1x_1^2 - 8x_3x_1 + y_1^2 - 4y_2 = 0,$$

c'est-à-dire, en remplaçant respectivement x_1, x_3, y_1, y_2 par leurs valeurs $a+b+c$, abc, $a^2+b^2+c^2$, $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$, précisément l'identité (6).

Au lieu d'éliminer x_2, on aurait pu éliminer x_1, ce qui aurait donné

$$x_2^4 - 2y_2x_2^2 - 8x_3^2x_2 + y_2^2 - 4y_1x_3^2 = 0,$$

et par conséquent l'identité

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l}(ab+ac+bc)^4 - 2\,\Sigma a^2b^2(ab+ac+bc)^2 \\ \quad - 8a^2b^2c^2(ab+ac+bc) + (\Sigma a^2b^2)^2 - 4a^2b^2c^2\,\Sigma a^2 = 0.\end{array}\right.$$

En appliquant cette identité à la résolution de l'équation du quatrième degré (3), on aurait été conduit à la nouvelle résolvante que voici

$$z^3 + \frac{p^2-4r}{2q}z^2 - \frac{p}{2}z + \frac{q}{8} = 0.$$

Si z_1, z_2, z_3 sont ses trois racines, les quatre racines de (3) seront données par la formule

$$\pm\sqrt{z_1z_2} \pm \sqrt{z_1z_3} \pm \sqrt{z_2z_3},$$

les signes étant choisis de manière que le produit des trois radicaux donne bien $-\frac{q}{8}$.

4. L'hypothèse $n=3$, $m=3$ conduit, quelle que soit la quantité x éliminée, à une identité qui n'offre aucun intérêt, parce que l'équation correspondante du neuvième degré se ramène immédiatement au troisième. Il en est de même pour le cas de $n=2$, $m=4$, où les identités qu'on obtient correspondent à des équations du huitième degré se ramenant immédiatement au quatrième.

Faisons encore $n=2$, $m=5$. Les formules de Newton donnent

$$y_1 = x_1^5 - 5x_1^3x_2 + 5x_1x_2^2,$$

d'où l'identité, d'ailleurs facile à établir directement,

$$(9)\qquad (a+b)^5 - 5ab(a+b)^3 + 5a^2b^2(a+b) - (a^5+b^5) = 0.$$

Comparons avec l'équation du cinquième degré privée de son second terme

$$x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0. \tag{10}$$

Pour identifier les premiers membres de (9) et (10), il faudra supposer $q = 0$, puis poser

$$\begin{aligned} -5ab &= p, \\ 5a^2b^2 &= r, \\ a^5 + b^5 &= -s; \end{aligned}$$

ce qui n'est possible que si $p^2 = 5r$.

Si donc les coefficients de l'équation (10) satisfont à ces deux conditions, savoir

$$q = 0, \quad p^2 - 5r = 0, \tag{11}$$

elle admettra pour racine $a + b$, a^5 et b^5 étant les deux racines de

$$y^2 + sy - \frac{p^5}{5^5} = 0,$$

et ayant, par suite, pour valeurs

$$-\frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{p^5}{5^5}}.$$

Si donc a, b sont respectivement deux valeurs des radicaux

$$\sqrt[5]{-\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{p^5}{5^5}}}, \quad \sqrt[5]{-\frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{p^5}{5^5}}},$$

choisies de manière que leur produit ab soit bien égal à $-\frac{p}{5}$, et si θ est une racine cinquième de l'unité, autre que 1, les cinq racines de l'équation (10) seront évidemment

$$\begin{aligned} &a + b, \\ &\theta a + \theta^4 b, \\ &\theta^2 a + \theta^3 b, \\ &\theta^3 a + \theta^2 b, \\ &\theta^4 a + \theta b. \end{aligned}$$

Comme exemple simple d'équation du cinquième degré satisfaisant aux conditions (11), on peut citer celle qui donne

$x = \sin\frac{\varphi}{5}$ en fonction de $\sin\varphi = m$; cette équation est la suivante :

$$x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}x - \frac{m}{16} = 0,$$

et l'expression générale de ses cinq racines est, par suite,

$$\frac{1}{2}\left\{\sqrt[5]{m+\sqrt{m^2-1}} + \sqrt[5]{m-\sqrt{m^2-1}}\right\},$$

d'après la formule donnée ci-dessus. Il est remarquable que, lorsque $-1 < m < 1$, les cinq racines soient toutes réelles, et que cependant la formule les donne compliquées d'imaginaires, comme la formule de Cardan pour le cas irréductible du troisième degré.

L'équation générale du cinquième degré ne peut être ramenée à satisfaire aux conditions (11), par une transformation de Tschirnaüs, qu'en résolvant trois équations simultanées du premier, du troisième et du quatrième degré; et, par une transformation linéaire, que s'il existe entre les invariants de la forme du cinquième degré, qui constitue le premier membre de l'équation, une certaine relation qu'il est facile de trouver. Désignons, suivant la notation de M. Salmon (*Leçons d'Algèbre supérieure*), par J, K, L les invariants fondamentaux du quatrième, du huitième et du douzième ordre; en supposant les relations (11) satisfaites et le coefficient de x^4 nul, ces invariants deviennent des fonctions de p et s; en éliminant ces deux quantités entre les trois expressions obtenues, on trouve aisément la relation cherchée, qui peut s'écrire sous la forme suivante

$$\alpha(125 + 361\alpha)^2 - 4(238\alpha + 5\beta)^2 = 0, \tag{12}$$

α désignant l'invariant absolu $1 - \frac{128\,K}{J^2}$, qui s'annule quand la forme admet un facteur carré, et β l'invariant absolu $1 - \frac{2048\,L}{J^3}$, qui s'annule en même temps que le précédent lorsque la forme admet deux facteurs carrés. On voit que, si la condition (12) est satisfaite, l'un des invariants absolus α, β ne peut s'annuler sans l'autre; il existe donc zéro ou deux facteurs carrés, ce qui résulterait aussi de la discussion des valeurs données ci-dessus pour les cinq racines.

5. Les identités (2) et (9) ne sont que des cas particuliers de celle-ci,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &(a+b)^m - mab(a+b)^{m-2} + m\,\frac{m-3}{1.2}\,a^2b^2(a+b)^{m-4} \\ &\quad - m\,\frac{(m-4)(m-5)}{1.2.3}\,a^3b^3(a+b)^{m-6} \\ &\quad + m\,\frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{1.2.3.4}\,a^4b^4(a+b)^{m-8} - \ldots - (a^m+b^m) = 0, \end{aligned}\right.$$

dont il est aisé de vérifier l'exactitude en s'assurant que, si elle est vraie pour $m = p - 1$ et $m = p$, elle l'est aussi pour $m = p + 1$.

Au moyen de cette identité (13), on peut évidemment obtenir l'expression des m racines de toute équation de degré impair ne contenant que les puissances impaires de l'inconnue, et dans laquelle les coefficients de ces puissances ne dépendent que d'un seul paramètre, en vertu de $\frac{m-3}{2}$ relations qu'il est facile d'écrire, à l'inspection de l'identité (13), sous la forme abrégée

$$(14)\qquad p_{2k} = \frac{(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1.2\ldots k.m.}\,p_2^k,$$

où p_{2k} est le coefficient de x^{m-2k}, le terme indépendant restant d'ailleurs tout à fait arbitraire.

En se plaçant à ce point de vue, la formule de Cardan apparaît comme la première d'une série indéfinie de formules semblables, qui s'appliquent à une série de groupes d'équations de tous les degrés impairs; pour chaque degré m, le groupe d'équations résolubles par cette formule est défini par $m - 4$ équations de condition entre les invariants de la forme de degré m. Pour $m = 3$, ce groupe comprend donc la totalité des équations de ce degré, et la formule donne la résolution de l'équation générale; pour $m > 3$, il ne comprend plus qu'un groupe spécial d'équations du degré considéré, et d'autant plus spécial que ce degré est lui-même plus élevé.