BULLETIN DE LA S. M. F.

WEILL

Sur des polygones dont les côtés sont tangents à une courbe et dont tous les sommets sont sur la courbe

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 127-131
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__127_1>

Sur des polygones dont les côtés sont tangents à une courbe, et dont tous les sommets sont sur la courbe; par M. Weill.

(Séance du 5 mai 1882.)

Considérons une courbe unicursale, et soit t la valeur du paramètre correspondant à un point A de la courbe; nous désignerons, dans tout ce qui va suivre, un point de la courbe par le paramètre correspondant. Menons au point A la tangente qui rencontre la courbe, supposée de degré m, en $(m-2)$ points $T_1 T_2 \ldots T_{m-2}$.

Soit $f(T, t) = 0$ l'équation qui donne les valeurs T, et admettons que cette équation soit homogène en T et t. Menons en T_1 la tangente à la courbe, et soit θ l'un des points où elle rencontre la courbe, on aura $f(\theta, T_1) = 0$. Posons

$$\frac{T}{t} = z, \quad \frac{\theta}{T_1} = u.$$

Les $(m-2)$ valeurs de u seront respectivement égales aux $(m-2)$ valeurs de z; on aura donc

$$\frac{\theta}{T_1} = \frac{T_1}{t},$$

ou bien

$$\frac{\theta}{T_1} = \frac{T_\alpha}{t}.$$

La première solution donne pour θ une valeur $\frac{T_1^2}{t}$ qui se distingue des autres et que nous laisserons de côté pour le moment. La deuxième solution donne $\theta = \frac{T_1 T_\alpha}{t}$ et montre que le point θ est à la rencontre des tangentes en T_1 et T_α; donc les tangentes en tous les points T_1, T_2, ..., T_{m-2} forment un polygone dont *tous les sommets* sont sur la courbe.

On voit de plus que ces points B sont représentés par les produits deux à deux de toutes les valeurs T, chaque produit étant divisé par t.

Ceci posé, la tangente en T_1 rencontre la courbe en $(m-2)$ points qui sont

$$\frac{T_1^2}{t}, \quad \frac{T_1 T_2}{t}, \quad \frac{T_1 T_3}{t}, \quad \ldots, \quad \frac{T_1 T_{m-2}}{t}.$$

En ne considérant que les $(m-3)$ derniers points, menons en ces points les tangentes; elles se couperont mutuellement sur la courbe en des points C

$$\frac{T_1 T_2 T_3}{t^2}, \quad \frac{T_1 T_2 T_4}{t^2}, \quad \ldots.$$

Mais si l'on opère de même sur les tangentes en $T_2 T_3$ ..., on aura sur la courbe un système de points C, chacun desquels sera le point de concours de *trois tangentes*, et tous ces points seront représentés par les produits trois à trois des quantités T, chaque produit étant divisé par t^2. De même les tangentes en tous les points C se coupent quatre par quatre sur la courbe, et ainsi de suite; enfin on arrive à $(m-2)$ tangentes se coupant en un même point de la courbe, et ce point a pour paramètre $\frac{T_1 T_2 \ldots T_{m-2}}{t^{m-3}}$, c'est-à-dire λt, λ étant une constante.

Inversement, si d'un point pris sur la courbe on mène les tangentes, au nombre de $(m-2)$, les droites qui joignent les points de contact deux à deux sont tangentes à la courbe en des points qui sont distribués trois par trois sur des droites; ces nouvelles droites touchent la courbe en des points qui sont distribués quatre par quatre sur des droites, et ainsi de suite; on arrive enfin à $(m-2)$ points situés sur une même tangente à la courbe. Prenons, par exemple, une courbe du sixième degré jouissant des propriétés énoncées : si d'un point de la courbe on lui mène les quatre tangentes, les six droites, obtenues en joignant deux à deux les points de contact, touchent la courbe en six points, qui sont les sommets d'un quadrilatère complet dont les côtés touchent la courbe en quatre points, et ces quatre points sont sur une même tangente à la courbe.

Revenons au cas général. La tangente en T_1 rencontre la courbe en un point qui se distingue des autres et qui est $\frac{T_1^2}{t}$; soit β ce point. Chaque tangente en $T_1 T_2 \ldots T_{m-2}$ fournira un point β. En l'un des points B menons la tangente; elle rencontrera la courbe en $(m - 4)$ points C et en deux points que nous désignerons par γ et γ', et qui seront, par exemple,

$$\frac{T_1 T_5^2}{t^2}, \quad \frac{T_2 T_6^2}{t^2}.$$

En général, si nous prenons sur la courbe un point où viennent converger P des tangentes que nous considérons, la tangente en ce point rencontrera la courbe en P points, ne faisant pas partie du système des points dont il est question, et qui, par conséquent, se distinguent de autres points de rencontre de cette tangente avec la courbe; ces points sont représentés par des valeurs du paramètre de la forme

$$\frac{T_1 T_2 T_3 \ldots T_{p-1} T_p^2}{t^p};$$

plus simplement, on peut dire que ces P points s'obtiennent en multipliant la valeur θ du point où viennent converger P tangentes successivement par $\frac{T_\alpha}{t}, \frac{T_\beta}{t}, \ldots$; $T_\alpha, T_\beta, \ldots$ étant les facteurs du numérateur de θ.

En particulier, le point final, où viennent converger $(m - 2)$ tangentes, a pour paramètre

$$\frac{T_1 T_2 \ldots T_{m-2}}{t^{m-3}},$$

ou λt; donc la tangente en ce point rencontre la courbe en $(m - 2)$ points qui ont pour paramètres $\lambda T_1, \lambda T_2, \ldots, \lambda T_{m-2}$, ce qui montre une correspondance bien simple entre le point initial et le point final; ce résultat peut se prévoir, car l'équation en z montre que, si t se change en λt, $T_1, T_2, \ldots$ se changeront en $\lambda T_1, \lambda T_2, \ldots$.

Des développements qui précèdent résulte le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si l'on mène en un point t d'une courbe unicursale la tangente qui rencontre la courbe en des points* T, *et que l'équation qui donne* T *en fonction de t soit homogène en* T *et t, les tangentes aux points* T *se coupent deux à deux en des points* B *de la courbe; les tangentes aux points* B *se coupent trois à trois en des points* C *de la courbe, et ainsi de suite. Si, d'un point de la courbe qui jouit des propriétés indiquées, on mène les tangentes, leurs points de contact sont deux à deux sur des droites tangentes à la courbe; les points de contact de ces nouvelles droites sont trois à trois sur des tangentes à la courbe, et ainsi de suite.*

Une classe de courbes jouissant des propriétés énoncées est formée par toutes les courbes ayant une équation de la forme

$$\alpha^m - \beta^p \gamma^{m-p} = 0,$$

α, β, γ désignant trois fonctions linéaires. Par une transformation homographique, on ramène cette équation à la forme simple

$$x = t^p, \quad y = t^m.$$

L'équation en T et t est ici

$$T^m - m t^{m-p} T^p + (m-p) t^m = 0.$$

On peut toujours supposer m pair, si m et p sont de parité différente, et l'on a alors

$$T_1 T_2 \ldots T_{m-2} = (m-p) t^{m-2};$$

donc la constante désignée tout à l'heure par λ est ici égale à $(m-p)$. Par conséquent, si $(m-p)$ est égal à l'unité, le point final se confond avec le point initial. Dans ce cas particulier, la figure de géométrie formée par toutes les tangentes considérées, d'ailleurs imaginaires, est remarquable, en ce que, si l'on part de la tangente en un point de la courbe, ou des tangentes partant de ce point, on arrive, dans les deux cas, aux mêmes points et aux mêmes droites.

Considérons maintenant une courbe gauche ayant pour équations

$$x = t^p, \quad y = t^q, \quad z = t^r.$$

Il est facile de voir que si, en un point de cette courbe, on mène le plan osculateur, qui rencontre la courbe en des points T, l'équation en T et t est homogène, et, par conséquent, les propriétés énoncées plus haut s'appliquent. On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Si en un point de la courbe gauche, ayant pour équations* $x = t^p$, $y = t^q$, $z = t^r$, *on mène le plan osculateur, lequel rencontre la courbe en un certain nombre d'autres points, et si en ces points on mène les plans osculateurs, ils forment un polyèdre dont les arêtes rencontrent respectivement la courbe. Si, aux points où ces arêtes rencontrent la courbe, on mène les plans osculateurs, ils se couperont trois à trois sur la courbe, et ainsi de suite.* L'équation en $\frac{T}{t}$ est ici, en posant $\frac{T}{t} = z$,

$$(z^p - 1)qr(q - r) + (z^q - 1)rp(r - p) + (z^r - 1)pq(p - q) = 0.$$

Dans tout ce qui précède, on s'est appuyé uniquement sur ce que l'équation en T et t était homogène. Dès lors, on peut remplacer la tangente à la courbe plane considérée d'abord par toute courbe déterminée quand le point de la courbe unicursale est donné, par exemple, par le cercle osculateur en ce point; on voit aisément comment on pourrait généraliser les propriétés précédentes, qui reposent sur une propriété analytique extrêmement simple.

M. *Halphen* me fait remarquer que l'équation considérée peut se présenter sous forme non homogène; il suffit qu'on puisse la ramener à être homogène par une transformation rationnelle du paramètre.