BULLETIN DE LA S. M. F.

PERRIN.

Sur le problème des aspects

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 103-127

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__103_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur le problème des aspects; par M. Perrin.

(Séances du 17 février et du 3 mars 1882.)

1. Le problème des divers aspects sous lesquels on peut voir un système de n points distribués sur un plan, lorsqu'on circule sur ce plan à volonté, a fait l'objet, dans les séances précédentes de la Société mathématique, de deux intéressantes Communications :

l'une de M. Halphen, qui a formulé l'énoncé précis du problème, l'a traité dans les cas les plus simples, et a montré comment il se rattache à l'étude des discontinuités de certaines intégrales définies; l'autre de M. Laisant, qui a donné l'expression, en fonction de n, d'une limite supérieure du nombre R des régions d'aspect constant, c'est-à-dire déterminées par la condition que l'observateur circulant à volonté dans l'une de ces régions ne cesse pas de voir le système des n points sous le même aspect (dans le même ordre circulaire), mais que l'aspect change dès qu'il passe dans l'une des régions contiguës.

A l'aide de l'expression donnée par lui, M. Laisant a fait ressortir avec quelle rapidité décroît, quand on fait croître n au delà de 5, le rapport du nombre des aspects possibles au nombre $(n-1)!$ des aspects imaginables. Mais le nombre lui-même R des régions d'aspect constant paraissait difficile à déterminer, car il ne dépend pas seulement du nombre n des points du système, mais aussi de la manière dont ces points sont distribués les uns par rapport aux autres, comme on le voit immédiatement en faisant la figure pour $n=4$; il était donc indispensable d'introduire quelque nouvel élément qui permît de tenir compte de cette distribution relative des points. Je vais exposer les résultats auxquels je suis parvenu dans cet ordre d'idées, en généralisant un peu le problème, résultats qui pourront sans doute être utilisés aussi dans d'autres questions.

2. Soient donnés à volonté dans le plan n points, que j'appellerai les *sommets* du système [1]. Si on les joint par des droites de toutes les manières possibles, on obtiendra m droites

$$\left[m = \frac{n(n-1)}{2}\right],$$

dont chacune se trouvera divisée par les deux sommets qu'elle joint en trois segments, savoir un intérieur (compris entre les deux sommets) et deux extérieurs. Si les m droites étaient tracées d'une manière quelconque, elles se couperaient en $\frac{m(m-1)}{2}$ points;

---

[1] Je fais abstraction des cas particuliers, où plusieurs sommets ou séries de sommets seraient disposés en ligne droite.

chaque sommet remplace évidemment $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ de ces points d'intersection : il en reste donc

$$(1) \qquad \Delta = \frac{1}{1}[m(m-1) - n(n-1)(n-2)].$$

J'appellerai *nœuds* ces Δ point d'intersection des m droites, autres que les segments. Si l'on remplace m par sa valeur $\frac{n(n-1)}{2}$, il vient

$$(2) \qquad \Delta = \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Les nœuds peuvent se classer en trois espèces, suivant qu'ils résultent du croisement de deux segments extérieurs, de deux segments intérieurs, ou d'un segment extérieur avec un intérieur; je les distinguerai donc en nœuds *extérieurs, intérieurs* et *mixtes,* et si δ, δ', δ'' sont respectivement les nombres de nœuds appartenant à ces trois espèces, on aura

$$(3) \qquad \delta + \delta' + \delta'' = \Delta.$$

D'autre part, le nombre ρ_0 des régions déterminées par les m droites est, comme l'a établi M. Laisant,

$$(4) \qquad \rho_0 = \frac{1}{2}[m(m+1) + 2 - n(n-2)(n-3)].$$

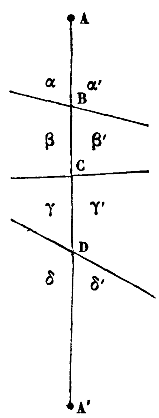
3. Il resterait maintenant, pour obtenir l'ensemble des régions d'aspect constant et en calculer le nombre, à effacer tous les segments *intérieurs* et à rechercher quelle réduction amène cette opération dans le nombre de régions ρ_0 donné par la formule (4). Si, au lieu d'effacer tous les segments *intérieurs,* on effaçait tous les segments *extérieurs,* on obtiendrait une configuration en quelque sorte complémentaire de la précédente, et qui, ainsi que l'a montré M. Halphen, se présente concurremment avec elle dans l'étude des discontinuités des intégrales définies auxquelles il a été fait allusion ci-dessus, selon la manière dont on choisit le point de départ des intégrations. Si, enfin, on effaçait un certain nombre de segments tant intérieurs qu'extérieurs, choisis suivant une loi quelconque, on obtiendrait encore une configuration toute différente. Je vais supposer qu'on opère ainsi suivant une loi arbitraire,

et chercher comment varie le nombre des régions lorsque l'on vient à effacer un segment quelconque, à un instant quelconque de l'opération.

A cet instant, on peut se représenter les n sommets, avec les segments non encore effacés qui les relient plus ou moins complètement entre eux, comme formant une configuration analogue à celles que présentent les cartes célestes : quelques sommets peuvent apparaître complètement isolés ; d'autres, réunis entre eux par des segments intérieurs, mais privés de tous les segments extérieurs qui les réunissaient primitivement à la droite de l'infini (ou plutôt au cercle de rayon infiniment grand que l'on peut se représenter comme limitant le plan), formeront une ou plusieurs constellations isolées dans le plan [1]; les autres, enfin, seront restés rattachés par des segments extérieurs, soit directement soit par l'intermédiaire de sommets ou de nœuds voisins, au cercle de l'infini ; tous ces derniers, reliés ainsi entre eux par l'intermédiaire du cercle de l'infini, devront été considérés comme ne formant qu'un seul groupe, résidu de la configuration primitive.

Ceci posé, soit à effacer un segment de plus, tel que AA' (*fig.* 1).

Fig. 1.



Deux cas peuvent se présenter : ou la suppression de ce segment

(1) Rien ne s'oppose à ce que ces constellations soient intérieures les unes aux autres.

ne changera rien au nombre des constellations isolées, ou il l'augmentera d'une ou plusieurs unités. Dans le premier cas (le plus fréquent et même le seul qui puisse se présenter au début de l'opération), il est visible que le segment servait de séparation entre autant de couples de régions distinctes $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$, qu'il contenait de *nœuds* B, C, D n'ayant pas encore disparu par l'effacement antérieur d'autres segments, plus un; pour chacun de ces couples, les deux régions séparées par le segment se confondent lorsqu'on vient à l'effacer : la réduction produite dans le nombre des régions est donc précisément égale au nombre des nœuds qui disparaissent, plus un. Dans le second cas, considérons l'un des groupes de sommets qui devient isolé quand on efface le segment AA'; ce groupe peut comprendre l'un des deux sommets extrêmes, A par exemple, avec quelques-uns des segments qui croisent AA', ou comprendre seulement quelques-uns de ces segments. Supposons qu'il comprenne le sommet A et le segment qui passe par le nœud B : dès lors les deux régions β et β' se rejoignaient déjà en faisant le tour de ce groupe, et la réduction produite dans le nombre des régions par la suppression de AA' sera moindre d'une unité que si $\beta\beta'$ avaient été deux régions distinctes. Supposons, au contraire, que le groupe considéré ne comprenne ni l'un ni l'autre des sommets AA', et que les nœuds B, D soient les deux nœuds extrêmes dépendant de ce groupe sur le segment AA'. Dès lors il est clair que les régions α et δ se rejoignaient déjà en contournant le groupe et ne formaient qu'une seule région, et de même pour α' et δ'; la suppression de AA' réunira donc seulement deux régions $\alpha\delta$ et $\alpha'\delta'$ en une seule, au lieu de réunir quatre régions α, α', δ, δ' en deux $\alpha\alpha'$, $\delta\delta'$. La réduction dans le nombre des régions sera donc encore moindre d'une unité que s'il ne s'était pas formé un nouveau groupe isolé. Réciproquement, on verrait sans peine que cette réduction, moindre dans le nombre des régions, ne peut se présenter que s'il se forme de nouveaux groupes isolés, la différence étant précisément égale au nombre de ces groupes.

Donc, en définitive, si à un instant quelconque on se trouve avoir effacé s' segments, ce qui a fait disparaître d' nœuds, et isolé g sommets ou groupes de sommets, le nombre des régions est devenu

$$\rho = \rho_0 - s' - d' + g.$$

Introduisons dans cette expression, au lieu des nombres s' et d' de segments et de nœuds disparus, les nombres s et d de segments et de nœuds qui subsistent, au moyen des relations

$$s = 3m - s', \quad d = \Delta - d';$$

remplaçons, enfin, ρ_0, Δ et m par leurs valeurs en fonction de n; il viendra finalement

$$\rho = 1 + s + d + g - n. \tag{5}$$

Il est remarquable que cette formule soit beaucoup plus générale que celles dont nous l'avons déduite : elle s'applique, en effet, à toutes les configurations que l'on peut obtenir en joignant arbitrairement par s lignes, droites ou courbes, n points pris à volonté sur un plan, sur une sphère ou plus généralement sur toute surface simplement connexe. Pour s'en assurer, il suffit de remarquer :

1° Que toute surface simplement connexe pouvant être ramenée à une aire plane à un seul contour, par voie de déformation continue sans déchirure (après avoir au besoin pratiqué une ouverture infiniment petite), la configuration qui y a été tracée sera ainsi ramenée à une configuration plane, sans variation dans le nombre des sommets, des nœuds, des segments, ni des groupes isolés;

2° Que dans une configuration plane, formée de segments courbes, il suffit de considérer comme nouveaux sommets un nombre suffisant de points convenablement choisis sur ces segments, pour pouvoir rectifier les segments plus petits ainsi obtenus, sans introduire de nouveaux nœuds; or tout sommet qu'on introduit ainsi sur un segment augmente d'une unité à la fois s et n, et laisse, par suite, invariable $s - n$, en sorte que la formule (5) ne cesse pas d'être applicable.

Il serait d'ailleurs facile de généraliser encore la formule (5) et d'établir le théorème suivant :

Si k est l'ordre de connexion, défini comme on le fait d'ordinaire dans la théorie des surfaces de Riemann, et que l'on appelle indice de connexion *la quantité* $2 - k$, *s'il s'agit d'une aire ou d'une surface ayant au moins un contour, ou la quantité* $3 - k$ *s'il s'agit d'une surface fermée : la somme* Σi *des* *indices de connexion des régions déterminées sur une surface ou sur une aire d'indice* I *en joignant entre eux ou à des points quelconques des contours, au moyen de s segments tracés d'une manière quelconque, n points pris arbitrairement, sera, en appelant d le nombre des points de croisement de ces segments,*

$$\Sigma i = \mathrm{I} + s + d - n. \tag{6}$$

De cette formule on pourrait déduire plusieurs conséquences intéressantes ; je me bornerai à indiquer la relation suivante, entre le nombre F des faces d'un polyèdre (supposées toutes des aires simplement connexes), le nombre S de ses sommets et le nombre A de ses arêtes :

$$\mathrm{F} + \mathrm{S} = \mathrm{A} + \mathrm{I}; \tag{7}$$

I est l'indice de connexion de l'ensemble de la surface du polyèdre, c'est-à-dire deux pour les polyèdres ordinaires (sphéroïdaux), zéro pour les polyèdres assimilables au tore ou anneaux polyédriques, etc. Si quelques-unes des faces ne sont pas simplement connexes, on devra prendre pour F la somme des indices de connexion des faces.

En faisant $\mathrm{I} = 2$, et exprimant que toutes les faces ont le même nombre p de côtés, et qu'à tous les sommets aboutissent le même nombre q d'arêtes, on obtient la relation

$$f + \frac{pf}{q} = \frac{pf}{2} + 2,$$

ou

$$f = \frac{4q}{2(p+q) - pq}, \tag{8}$$

qui caractérise les polyèdres réguliers et permet d'en déterminer le nombre et la nature.

5. Je reviens au problème des aspects. Pour obtenir la configuration qui détermine les régions d'aspect constant, il faut effacer tous les segments intérieurs, ce qui fait disparaître les nœuds intérieurs et mixtes, et ne donne naissance à aucun groupe isolé. Faisant donc dans la formule (5) $s = 2m = n(n-1)$, $d = \delta$,

$g = 0$, nous obtenons pour le nombre R des régions d'aspect constant,

$$(9) \qquad R = (n-1)^2 + \delta.$$

Les nœuds extérieurs, dont le nombre δ figure dans l'expression (9), peuvent être définis très simplement, au point de vue du problème des aspects, comme étant les points du plan, en nombre limité, pour lesquels le nombre *apparent* des sommets du système est de $n - 2$, tandis que, pour un point pris au hasard, le nombre apparent est de n, et qu'il se réduit à $n - 1$ pour une infinité simple de points, savoir tous les points des segments extérieurs.

Cherchons maintenant le nombre R' des régions dans le problème complémentaire, celui où l'on ne laisse subsister que les segments intérieurs et par suite aussi que les nœuds intérieurs. Il faudra faire dans la formule (5) $s = \frac{n(n-1)}{2}$, $d = \delta'$ et $g = 1$, puisque l'ensemble des sommets forme alors un groupe unique isolé du cercle de l'infini. Il vient, par suite

$$(10) \qquad R' = \frac{n^2 - 3n + 4}{2} + \delta'.$$

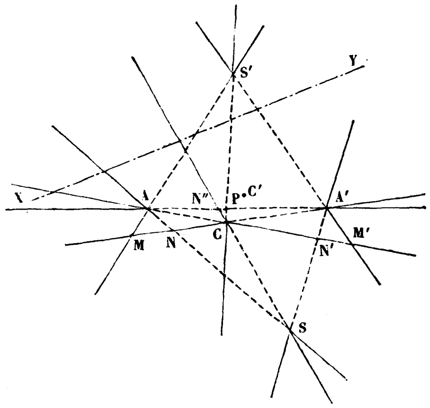
6. La question qui se présente immédiatement est celle-ci : Comment et entre quelles limites varient δ et δ', lorsqu'on fait varier de toutes les manières possibles la disposition relative des n sommets?

Pour y répondre, remarquons tout d'abord que, le nombre total des nœuds $\delta + \delta' + \delta''$ étant invariable pour une valeur donnée de n, le seul effet d'un changement dans la disposition relative des sommets est de modifier l'*espèce* des nœuds ; et, si ce changement s'opère par déplacement relatif *continu* des sommets, chaque modification ne pourra être que le changement d'un nœud, soit extérieur, soit intérieur, en un nœud mixte, ou inversement : et pour qu'un tel changement se produise, il est évidemment nécessaire et suffisant que dans son mouvement relatif un des sommets vienne à traverser quelque part la droite qui en joint deux autres.

Considérons donc un sommet mobile C au moment où il est sur le point de traverser la droite joignant les deux sommets fixes A, A' (*fig.* 2), et supposons qu'il la traverse entre A et A'.

Soit S un des sommets situés du même côté de AA′ que le sommet C dans sa position actuelle, S′ un des sommets situés du côté opposé. A l'inspection de la figure, sur laquelle les segments extérieurs ont été tracés en plein et les segments intérieurs en pointillé, il est visible que les trois droites mobiles CA, CA′, CS, donnent par leur croisement avec les trois droites fixes AA′, AS, A′S *trois* nœuds mixtes N, N′ et N″; tandis que, pour le sommet S′, le système mobile correspondant CA, CA′, CS′ donne par croisement avec le système fixe AA′, AS′, A′S′ *deux* nœuds extérieurs

Fig. 2.



MM′, et un nœud intérieur P. Lorsque le sommet mobile aura franchi AA′ et sera venu en C′, par exemple, il est clair que S et S′ n'auront fait que changer de rôle. Si donc il y avait p sommets tels que S, c'est-à-dire situés du côté de AA′ où se trouvait d'abord le sommet mobile, et $p' = n - p - 3$ sommets S′ du côté opposé, le nombre des nœuds intérieurs aura augmenté de $p - p'$, celui des nœuds extérieurs de $2(p - p')$, et celui des nœuds mixtes de $-3(p - p')$, par le fait du passage de C d'un côté à l'autre du segment intérieur AA′. Si le passage s'était fait par un des segments extérieurs de la même droite, on verrait sans peine que les variations seraient les mêmes en valeur absolue, mais changées de signe.

7. A l'aide de ce qui précède, on pourra trouver par quelques

constructions faciles les valeurs de δ, δ', δ'' qui correspondent à une disposition donnée quelconque des n sommets, pourvu que l'on connaisse les valeurs δ_0, δ'_0, δ''_0 de ces quantités pour une seule disposition particulière bien déterminée, car il suffira de déplacer successivement un certain nombre de sommets convenablement choisis, de manière à transformer la figure donnée en celle pour laquelle on connaît les valeurs des δ; et de compter, chaque fois que dans ce déplacement un sommet vient à traverser la droite qui en joint deux autres, combien il reste de sommets de chaque côté de cette droite; de faire la somme des quantités $p - p'$ ainsi trouvées, en les affectant d'un signe convenable, et les valeurs cherchées seront évidemment

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta &= \delta_0 - 2\Sigma(p-p'),\\ \delta' &= \delta'_0 - \Sigma(p-p'),\\ \delta'' &= \delta''_0 + 3\Sigma(p-p'). \end{aligned}\right.$$

Or, parmi toutes les dispositions que l'on peut imaginer pour les n sommets, il y en a une qui se prête immédiatement à la détermination directe des δ : c'est celle dans laquelle les n sommets forment les sommets d'un polygone convexe. Il est évident que dans ce cas $\delta'' = 0$ (et réciproquement, si $\delta'' = 0$, les n sommets forment nécessairement un polygone convexe). Pour déterminer δ (nombre des nœuds extérieurs), supposons que les sommets soient numérotés $1, 2, \ldots, n$ à partir de l'un d'eux en faisant le tour du polygone; la droite joignant les sommet 1 et p contiendra un nœud extérieur au croisement de chacune des $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ droites qui joignent deux à deux les $p-2$ sommets $2, 3, \ldots, p-1$, et de chacune des $\frac{(n-p)(n-p-1)}{2}$ droites qui joignent deux à deux les $n-p$ sommets numérotés $p+1$, $p+2$, $\ldots$, n; et elle n'en contiendra pas d'autre. Le nombre des nœuds extérieurs situés sur la droite $(1, p)$ sera donc

$$\frac{1}{2}[(p-2)(p-3)+(n-p)(n-p-1)],$$

et pour toutes les droites, en nombre $(n-1)$, qui passent par le sommet 1, on aura un nombre total de nœuds extérieurs, exprimé par

$$\frac{1}{2}\sum_{p=2}^{p=n}[(p-2)(p-3)+(n-p)(n-p-1)].$$

Chacun des n sommets en fournit autant; mais, comme chaque droite passe par deux sommets, et que chaque nœud appartient à deux droites, il faudra diviser le résultat par 4, et l'on aura, en définitive,

$$\delta_0=\frac{n}{8}\sum_{p=2}^{p=n}[(p-2)(p-3)+(n-p)(n-p-1)],$$

d'où, par un calcul facile,

$$\delta_0=\frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3),$$

et, par suite,

$$\delta_0=\frac{2}{3}\Delta.$$

Il en résulte immédiatement

(12)
$$\delta'_0=\frac{1}{3}\Delta.$$

Dès lors, posant $\Sigma(p-p')=\varepsilon$, les relations (11) deviennent

(13)
$$\left\{\begin{aligned}\delta&=2\left(\frac{\Delta}{3}-\varepsilon\right),\\ \delta'&=\frac{\Delta}{3}-\varepsilon=\frac{\delta}{2},\\ \delta''&=3\varepsilon.\end{aligned}\right.$$

Portant ces valeurs dans les relations (9) et (10), et exprimant Δ en fonction de n, il vient enfin

(14)
$$R=\frac{1}{12}(n-1)(n^3-5n^2+18n-12)-2\varepsilon,$$

(15)
$$R'=\frac{1}{24}(n^4-6n^3+23n^2-42n+48)-\varepsilon,$$

d'où l'on tire la relation

(16)
$$R-2R'=n-3.$$

8. Ces divers résultats peuvent se résumer dans l'énoncé suivant :

« Soient n points ou sommets pris à volonté sur un plan; si on
» les joint deux à deux par des droites, dont chacune est ainsi di-
» visée en trois segments, ces droites se couperont en

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$$

» autres points ou *nœuds*. Soit ε un certain entier positif, carac-
» téristique de la disposition relative des n sommets, et qui ne
» s'annule que si ces n sommets forment un polygone convexe.

» Soient δ, δ', δ'' les nombres respectifs des nœuds *extérieurs*
» (provenant du croisement de deux segments extérieurs), *inté-*
» *rieurs* (croisements de deux segments intérieurs), et *mixtes*
» (croisements d'un segment extérieur avec un intérieur) : le
» nombre δ des nœuds extérieurs est toujours *double* du nombre δ'
» des nœuds intérieurs, quelle que soit la disposition relative des
» sommets, et le nombre δ'' des nœuds mixtes est toujours un
» multiple de $3\,(\delta'' = 3\varepsilon)$.

» Soit R le nombre des régions entre lesquelles le plan se trouve
» divisé quand on efface tous les segments intérieurs, ce qui ne
» laisse subsister que les δ nœuds extérieurs; soit de même R' le
» nombre des régions quand on efface tous les segments extérieurs,
» ce qui ne laisse subsister que les δ' nœuds intérieurs; R et R'
» dépendent respectivement de n et δ, de n et δ' par les relations
» très simples (9) et (10), et sont, par conséquent, des fonctions
» de n et ε, données par les formules (14) et (15), et qui prennent
» leurs valeurs maxima pour $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire quand les n som-
» mets forment un polygone convexe; mais $R - 2R'$ reste con-
» stamment égal à $n - 3$, quelle que soit la disposition relative
» des n sommets.

» La valeur de la caractéristique ε ou $\frac{\delta''}{3}$ peut s'obtenir sans
» avoir besoin de tracer toutes les droites du système, en dépla-
» çant arbitrairement les sommets de manière à les ramener à
» former un polygone convexe, et en comptant, chaque fois que
» dans ce déplacement un sommet vient à traverser la droite qui
» en joindrait deux autres, combien il y a de sommets, non com-

» pris celui qui se déplace, du même côté que lui par rapport à la » droite qu'il va franchir : si ce nombre est p, la somme des quantités $2p - n + 3$, ainsi calculées pour chaque droite franchie, » et affectées du signe $+$ ou du signe $-$ suivant que le passage a » lieu par un segment *intérieur* ou par un segment *extérieur*, » donnera précisément ε. »

En supposant $\varepsilon = 0$, on a une limite supérieure R_0 du nombre R des régions d'aspect constant, limite qui est effectivement atteinte dans le cas d'un polygone convexe, et qui est sensiblement moindre que la limite supérieure ρ qu'avait calculée M. Laisant, comme le montre le tableau ci-dessous :

n.	$\delta_0 = \frac{2}{3}\Delta$.	R_0.	ρ.
3	0	4	7
4	2	11	18
5	10	26	41
6	30	55	85
7	70	106	162
8	140	189	287
9	252	316	478
10	420	501	756
11	660	760	1145
12	990	1111	1672
13	1430	1574	2367
14	2002	2171	3263
15	2730	2926	4396

On trouve d'ailleurs aisément que $R_0 = \frac{2\rho - n + 1}{3}$.

9. Il resterait à rechercher quelles valeurs peut prendre en réalité ε pour une valeur donnée de n, quel est, en particulier, le maximum de ε (qui correspond au minimum de δ, δ', R, R'), et quelles différences au point de vue géométrique présentent entre elles les diverses dispositions de n sommets qui correspondent aux diverses valeurs possibles de ε.

Je présenterai seulement sur ce sujet les remarques suivantes :

1° Si n est impair, ε ne peut prendre que des valeurs paires : cela résulte immédiatement de ce que ε est la somme d'un certain nombre de quantités de la forme $2p - n + 3$.

2° Les deux plus petites valeurs de ε, après zéro, sont $n - 3$,

$2(n-4)$ (¹). On le voit immédiatement en partant du polygone convexe à n sommets, qui donne $\varepsilon = 0$: si l'on déplace un des sommets, dans quelque direction que ce soit, la première droite du système qu'il ait à franchir augmente ε de $n-3$, et la seconde qu'il rencontre augmente ε soit de $n-3$, soit de $n-5$; la même chose a lieu si l'on déplace un second sommet au lieu de continuer à déplacer le premier.

3° Il est facile d'assigner, en fonction de n, une limite au-dessous de laquelle δ' ne peut descendre, sans qu'il soit toutefois démontré que cette limite puisse être effectivement atteinte par une disposition convenable des n sommets. Considérons, en effet, la figure obtenue en effaçant les segments extérieurs : elle donne, d'après la formule (10), $\frac{1}{2}(n^2-3n+4)+\delta'$ régions, dont chacune est un polygone possédant au moins trois côtés, et, par conséquent, trois angles. Le nombre total des angles de toutes les régions est donc au moins égal à

$$3\delta' + \frac{3}{2}(n^2-3n+4).$$

Mais chaque sommet du système, formant le point de départ de $n-1$ segments intérieurs, fournit $n-1$ angles; chaque nœud en fournit évidemment 4; le nombre total des angles est donc exactement

$$n(n-1)+4\delta'.$$

Nous pouvons donc écrire l'inégalité

$$n(n-1)+4\delta' \geq 3\delta' + \frac{3}{2}(n^2-3n+4),$$

d'où

$$\delta' \geq \frac{1}{2}(n-3)(n-4) \tag{17}$$

et, par suite,

$$\left\{\begin{aligned} \delta &\geq (n-3)(n-4), \\ R &\geq 2n^2-9n+13, \\ R' &\geq n^2-5n+8, \\ \varepsilon &\leq \frac{1}{24}(n-3)(n^3-3n^2-10n+48). \end{aligned}\right. \tag{18}$$

(¹) Ou $n-3$, $2(n-3)$, si $n=5$.

Les valeurs limites fournies par ces inégalités peuvent être réalisées en fait, si n est au plus égal à 6. Mais, au delà de 6, il n'en est plus de même, parce qu'il n'est plus possible de faire en sorte que toutes les régions soient de forme triangulaire.

4° Les n sommets étant disposés d'une manière quelconque, concevons qu'une droite, qui les laisse d'abord tous d'un même côté, s'en approche en restant constamment parallèle à une même direction, jusqu'à ce qu'elle vienne à passer par un sommet; qu'elle tourne alors autour de ce premier sommet jusqu'à en rencontrer un second, puis autour de ce second (toujours dans le même sens) jusqu'à en rencontrer un troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'elle revienne rencontrer le premier sommet. Nous aurons ainsi construit, au moyen de p des sommets du système, un polygone convexe qui renferme tous les autres à son intérieur. Faisant abstraction de ces p sommets, opérons de même à l'égard des $n-p$ sommets qui restent : nous obtiendrons un second polygone convexe, intérieur au premier. Continuons ainsi jusqu'à ce qu'il ne ne reste plus que 0, 1 ou 2 sommets. La figure aura été décomposée en polygones convexes intérieurs les uns aux autres, et la valeur de ε dépendra du nombre et de la nature de ces polygones, et en même temps de la disposition relative de leurs côtés, comme le montre la discussion des cas les plus simples, savoir $n=4$, 5 ou 6.

Pour $n=4$, on peut avoir : 1° un quadrilatère convexe, $\varepsilon=0$; 2° un triangle avec un sommet à l'intérieur, $\varepsilon=1$.

Pour $n=5$, on peut avoir : 1° un pentagone convexe, $\varepsilon=0$; 2° un quadrilatère convexe avec un sommet à l'intérieur, $\varepsilon=2$ [1]; 3° un triangle avec deux sommets à l'intérieur, $\varepsilon=4$.

Pour $n=6$, on peut avoir : 1° un hexagone convexe, $\varepsilon=0$; 2° un pentagone convexe avec un sommet à l'intérieur; ε a pour valeur 3, 4 ou 5, suivant que ce sommet se trouve dans l'un des cinq triangles (délimités par les cinq diagonales du pentagone) qui s'appuient sur les côtés du pentagone, dans l'un des cinq autres triangles intercalés entre les précédents, ou dans la région centrale; 3° un quadrilatère convexe avec deux sommets intérieurs,

---

[1] C'est la disposition que réalise la *fig.* 2.

$\varepsilon = 6$, 7 ou 8, suivant la position de ces deux sommets dans les quatre triangles délimités par les diagonales du quadrilatère ; 4° un triangle extérieur renfermant un second triangle, $\varepsilon = 9$, 10, 11 ou 12, suivant l'orientation des côtés du petit triangle par rapport à ceux du grand : la valeur maxima $\varepsilon = 12$ se présente si, par exemple, les deux triangles sont semblables et semblablement placés, et la valeur $\varepsilon = 9$ s'ils sont semblables, mais inversement placés, c'est-à-dire orientés à 180° de différence.

Pour $n > 6$, on pourrait établir une classification analogue, mais la complication croîtrait naturellement avec une grande rapidité à mesure que n augmenterait. Toutefois l'analogie porte à supposer que, quel que soit n, la valeur maxima de ε doit correspondre à la répartition des sommets en triangles successifs intérieurs les uns aux autres, plus 0, 1 ou 2 sommets à l'intérieur du dernier, selon que n est de la forme $3k$, $3k+1$, $3k+2$.

10. Puisque, lorsqu'on fait croître n au delà de 5, le nombre des régions d'aspect constant, et, par conséquent, *a fortiori*, le nombre des aspects réalisables ne croît que très lentement par rapport au nombre des aspects imaginables, il est intéressant de rechercher quels sont, parmi les aspects imaginables, ceux qui sont effectivement réalisables; comment ils se groupent d'après la disposition relative des sommets, quelle condition doit être remplie pour qu'un même aspect se reproduise dans deux ou un plus grand nombre de régions distinctes, etc. Il y a là toute une série de questions dont la solution paraît assez difficile; voici quelques propositions et remarques qui pourront servir de point de départ à ceux qui désireraient pousser plus loin l'étude du problème des aspects.

Considérons une droite mobile, qui balaye tout le plan en restant constamment parallèle à elle-même. Lorsqu'elle se trouve à une distance assez grande du groupe des n sommets pour laisser d'un même côté non seulement tous les sommets, mais encore tous les *nœuds* extérieurs, elle traverse $\frac{n(n-1)}{2}+1$ régions. Supposons que les sommets soient numérotés de 1 à n précisément dans l'ordre où cette droite mobile les rencontrera en se déplaçant; et supposons, pour fixer les idées, que cette droite parte de la partie supérieure de la figure, et que chaque aspect soit défini par l'ordre dans lequel les sommets sont vus en faisant le tour d'horizon de gauche à droite.

Alors, pour la première région que recoupe la droite mobile dans sa position initiale, région qui s'étend à l'infini dans l'angle supérieur de gauche de la figure, l'aspect est

$$1\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ n.$$

La région immédiatement contiguë que l'on rencontre en suivant la droite mobile est séparée de la première par une des droites du système, laquelle passe nécessairement par deux sommets dont les numéros se suivent; par exemple, par 3 et 4; et la traversée de cette droite a évidemment pour effet d'intervertir dans l'aspect l'ordre des sommets 3 et 4. L'aspect, pour la deuxième région, sera donc

$$1\ 2\ 4\ 3\ 5\ 6\ \ldots\ n.$$

Si, de même, on rencontre ensuite la droite qui joint les sommets 3 et 5, l'aspect, pour la troisième région, sera

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ \ldots\ n,$$

et ainsi de suite. Comme on doit nécessairement rencontrer toutes les droites du système, et que d'ailleurs, pour la dernière région, celle qui s'étend à l'infini dans l'angle supérieur *droit* de la figure, l'aspect est évidemment

$$n(n-1)\ \ldots\ 4\ 3\ 2\ 1,$$

il est clair que les aspects des $\frac{n(n-1)}{2}+1$ régions recoupées par la droite mobile dans sa position initiale se déduiront de l'aspect fondamental $1\ 2\ \ldots\ n$, en appliquant à cet arrangement, une fois et une seule, chacune des permutations obtenues en combinant deux à deux les n nombres qui y figurent. L'ordre dans lequel ces permutations se présenteront n'est pas complètement arbitraire, puisque, pour passer d'un aspect au suivant, on ne peut permuter que deux nombres contigus; mais c'est la seule condition à remplir, comme il est facile de s'en assurer, car elle équivaut à cette condition géométrique, que trois permutations entre trois nombres pris au hasard et combinés deux à deux représentent bien les trois côtés d'un triangle dont les sommets soient numérotés suivant la convention adoptée.

Prenons, comme exemple, le cas de $n=5$, avec la disposition de sommets de la *fig.* 2, et supposons la droite mobile parallèle à la direction XY. Les sommets devront être numérotés comme suit : $S'=1$, $A=2$, $C=3$, $A'=4$, $S=5$; et, d'après les inclinaisons relatives des diverses droites du système sur la direction XY, on aura, pour les aspects des onze régions initiales, le Tableau ci-dessous :

N° 1.

1	2	3	4	5
.	.	4	3	.
.	4	2	.	.
.	.	3	2	.
.	.	.	5	2
4	1	.	.	.
.	.	5	3	.
.	5	1	.	.
.	.	3	1	.
5	4	.	.	.
.	.	.	2	1

Dans ce Tableau, tout point remplace le nombre immédiatement supérieur dans la même colonne verticale; ainsi l'aspect de la cinquième région doit être lu 1 4 3 5 2, et il ne diffère de celui de la quatrième que par la permutation 5-2, qui est mise en évidence. Comme on le voit, le Tableau comprend bien les dix permutations 1-2, 1-3, 1-4, ..., et se termine par l'aspect 5 4 3 2 1.

On peut se donner à volonté l'ordre de ces dix permutations en observant seulement la condition indiquée précédemment, et il sera possible de réaliser la figure géométrique correspondante.

11. Supposons donc qu'on se soit donné le Tableau ci-dessus. Je vais montrer qu'en le soumettant à un traitement méthodique on peut trouver, sans le secours de la figure géométrique correspondante, toutes les particularités que présente cette figure au point de vue du problème des aspects, c'est-à-dire le nombre et la position des nœuds, et écrire tous les aspects correspondant aux différentes régions. La démonstration sera donnée pour $n=5$, mais elle est absolument générale.

Faisons marcher la droite mobile. Tant qu'elle ne rencontrera ni nœud ni sommet, les régions qu'elle recoupe resteront les mêmes. A la rencontre d'un nœud, qu'arrive-t-il? Les deux permutations qui représentent les deux droites passant par ce nœud ne feront que se transposer. Mais, pour pouvoir se transposer, il faut évidemment qu'elles se suivent sur le Tableau; de plus, deux droites qui se coupent en un nœud ne peuvent passer par un même sommet : donc deux permutations du Tableau ne peuvent se transposer que si elles n'ont pas de nombre commun, c'est-à-dire si elles occupent des colonnes verticales distinctes; par exemple, 4-1 et 5-3 remplissent les conditions voulues pour pouvoir se transposer, de même 3-1 et 5-4, de même 4-1 et 5-2, etc.

Lorsque la droite mobile arrive au sommet n° 1, il est clair que toutes les droites dont les permutations contiennent le chiffre 1 s'arrêtent à ce sommet; ces permutations doivent donc toutes disparaître du Tableau.

Mais au moment où la droite mobile est infiniment près du sommet 1, les quatre droites 1-2, 1-3, 1-4, 1-5 forment un faisceau de droites infiniment voisines; il faut donc que préalablement on ait rencontré les deux nœuds correspondant aux transpositions de 4-1 avec 5-3, et de 5-4 avec 2-1, de telle sorte que le Tableau ait pris l'aspect ci-dessous :

N° 2.

1	2	3	4	5
.	.	4	3	.
.	4	2	.	.
.	.	3	2	.
.	.	.	5	2
.	.	5	3	.
4	1	.	.	.
.	5	1	.	.
.	.	3	1	.
.	.	.	2	1
5	4	.	.	.

ce qui a introduit deux nouvelles régions, avec les aspects nouveaux 1 4 5 3 2, 4 5 3 2 1.

Les choses étant ainsi préparées, faisons franchir à la droite mobile le sommet n° 1 : elle ne recoupera plus que

$$\frac{n(n-1)}{2}+1-(n-1),$$

soit sept régions dont les aspects s'obtiendront en supprimant du Tableau n° 2 les permutations contenant le chiffre 1; ce qui donne le Tableau n° 3 ci-dessous :

N° 3.

1	2	3	4	5
.	.	4	3	.
.	4	2	.	.
.	.	3	2	.
.	.	.	5	2
.	.	5	3	.
.	5	4	.	.

Ici toutes les permutations contenant le chiffre 2 se trouvent contiguës; la droite mobile ne croisera donc pas de nœuds avant d'arriver au sommet 2. En franchissant ce sommet, il faudra supprimer 2-3, 2-4, 2-5, et introduire à la place 1-2, puisque le second segment extérieur de cette droite reparaît évidemment; ce qui donne le Tableau n° 4 :

N° 4.

1	2	3	4	5
.	.	4	3	.
2	1	.	.	.
.	.	.	5	3
.	.	5	4	.

Avant d'arriver au sommet n° 3, il faut grouper les permutations 3-4 et 3-5, qui devront être supprimées en franchissant ce sommet et remplacées par 1-3 et 2-3. Mais il semble qu'il y ait indétermination, puisqu'on peut faire ce groupement soit en transposant 2-1 et 4-3, soit en transposant 2-1 et 5-3. Il n'en est cependant rien, parce que nous devons arriver, en dernier résultat, à un Tableau qui reproduira le Tableau n° 1 renversé, c'est-à-dire avec les mêmes permutations, mais se présentant dans l'ordre inverse; en sorte que nous devons avoir les trois permutations 1-2, 1-3 et 2-3, dans cet ordre précisément et non dans tout autre, ce qui ne peut être obtenu qu'en faisant d'abord la transposition de 4-3 avec 1-2, et introduisant ensuite 1-3 et 2-3. Nous avons donc un nœud qui fournit l'aspect nouveau 2 1 4 3 5, puis, après avoir franchi le sommet n° 3, nous formons le Tableau n° 5 :

N° 5.

1	2	3	4	5
2	1	.	.	.
.	3	1	.	.
3	2	.	.	.
.	.	.	5	4

On verrait de même que le passage du sommet du n° 4 conduit au Tableau n° 6 :

N° 6.

1	2	3	4	5
2	1	.	.	.
.	3	1	.	.
3	2	.	.	.
.	.	4	1	.
.	4	2	.	.
4	3	.	.	.

puisque le passage du sommet n° 5 exige que l'on intercale les permutations 1-5, 2-5, 3-5, 4-5 à l'endroit marqué ci-dessus par une ligne transversale, ce qui donne le Tableau n° 7 :

N° 7.

1	2	3	4	5
2	1	.	.	.
.	3	1	.	.
.	.	.	5	4
.	.	5	1	.
.	5	3	.	.
5	2	.	.	.
.	3	2	.	.
.	.	.	4	1
.	.	4	2	.
.	4	3	.	.

et qu'enfin, pour obtenir le Tableau inverse du n° 1, il ne reste plus qu'à transposer 3-1 avec 5-4, 4-1 avec 3-2 et avec 5-2.

Nous avons donc ainsi rencontré en tout six nœuds, savoir deux avant le sommet n° 1, un entre le sommet n° 2 et le sommet n° 3, et les trois derniers après le sommet n° 5. Ces diverses circonstances se présentent, en effet, sur la *fig.* 2, si ce n'est que le nœud M′ se présente entre le sommet n° 4 et le sommet n° 5 ; et, en effet, la transposition de 3-2 avec 4-1 pouvait aussi bien se faire sur le Tableau n° 6 que sur celui n° 7, et aurait pu être reconnue comme nécessaire dès que le Tableau n° 6 était formé : à quelque moment que cette transposition soit effectuée, elle donne d'ailleurs toujours le même aspect nouveau 2 3 4 1 5 ou 5 2 3 4 1, ce qui est identique, d'après la définition de l'aspect (1).

On peut remarquer que lorsque la droite mobile a franchi p des n sommets, le nombre des régions qu'elle traverse est devenu

$$\frac{n(n-1)}{2}+1-[(n-1)+(n-3)+(n-5)+\ldots(n-2p+1)],$$

c'est-à-dire

$$\frac{p(p-1)+(n-p)(n-p-1)}{2}+1,$$

et que le nombre total des régions rencontrées par elle depuis l'origine de son mouvement jusques et y compris sa position actuelle est

$$\frac{n(n-1)}{2}+1+[-1+0+1+2+\ldots+(p-2)]+\delta_p,$$

en appelant δ_p le nombre des nœuds qu'elle a successivement rencontrés, c'est-à-dire

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{p(p-3)}{2}+1+\delta_p,$$

ce qui donne pour le nombre total des régions du plan, en faisant $p=n$ et $\delta_p=\delta$,

$$(n-1)^2+\delta,$$

comme nous l'avons trouvé par une autre méthode.

11. « *Une droite quelconque rencontre au plus deux régions distinctes donnant un même aspect déterminé, et, dans ce cas, tous les sommets sont situés d'un même côté de cette droite.* »

---

(1) L'indétermination qui se présente ici pour la transposition de 2-3 avec 1-4 signifie, au point de vue géométrique, que le nœud M' peut se trouver plus près ou plus loin de XY que le sommet S, suivant la position de C, tout le reste de la figure étant invariable.

Considérons, en effet, la droite mobile dans une de ses positions, et formons, avec la notation précédemment indiquée, le tableau des aspects pour les diverses régions qu'elle recoupe; si deux de ces régions ont un même aspect, on devra rencontrer dans le Tableau les deux aspects

AB,
BA,

A désignant un groupe de sommets dans un certain ordre, et B les autres sommets, également dans un certain ordre. Pour passer de AB à BA, il faut nécessairement rencontrer toutes les permutations qui s'obtiennent en combinant chacun des sommets du groupe A avec chacun des sommets du groupe B, mais il faut aussi ne rencontrer *aucune* des permutations où figurent deux sommets appartenant au même groupe. Donc tous les sommets du groupe B sont situés du même côté de la droite que *chacun* des sommets du groupe A, ce qui exige que tous ceux-ci soient d'un même côté de la droite; et dès lors tous les sommets, tant du groupe B que du groupe A, seront situés de ce même côté.

Supposons maintenant que la droite recoupe trois régions de même aspect, on devra avoir les trois aspects

ABC,
BCA,
CAB,

ou encore ceux-ci :

ABC,
CAB,
BCA,

en désignant par A, B, C des groupes déterminés de sommets. Mais cela est impossible : car dans la première hypothèse les groupes A et B devraient permuter entre eux une première fois pour passer de ABC à BCA, puis une seconde fois pour passer de BCA à CAB, et l'on a vu que toute permutation ne peut être rencontrée qu'une fois.

La même chose aurait lieu, dans la seconde hypothèse, pour les groupes B et C; et elle aurait lieu *a fortiori*, si l'on supposait plus de trois régions de même aspect.

12. Quelque grand que soit n, on peut toujours faire en sorte que deux régions distinctes donnent un même aspect. Cela est presque évident à l'aspect du Tableau initial donné précédemment, car on peut disposer de l'ordre des permutations de manière à ne permuter tout d'abord qu'un sommet ou groupe de p sommets avec tous les autres; par exemple, écrire

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ . & . & . & . & 6 & 5 \\ . & . & . & 6 & 4 & . \\ . & . & 6 & 3 & . & . \\ . & 6 & 2 & . & . & . \\ 6 & 1 & . & . & . & . \end{array}$$

et l'on voit que, pour $n = 6$, la sixième région donne le même aspect que la première. Mais on peut obtenir un résultat analogue pour deux régions aboutissant à deux sommets consécutifs du polygone convexe qui enveloppe tous les sommets du système. Soient 1 et 2 les numéros de ces sommets, et numérotons les autres dans l'ordre où ils se présentent, vus du sommet 1, quand on fait un demi-tour d'horizon, de gauche à droite à partir du sommet 2. L'aspect, pour un observateur placé au sommet 1, sera

$$2\ 3\ 4\ \ldots\ n,$$

et, pour chacune des n régions immédiatement contiguës au sommet 1, l'aspect s'obtiendra évidemment en intercalant le chiffre 1 successivement à chacune des n places possibles dans l'arrangement ci-dessus.

Soit demandé de reproduire l'un de ces aspects, par exemple

$$2\ 3\ 4\ 1\ 5\ 6\ \ldots\ n,$$

dans l'une des régions immédiatement contiguës au sommet n° 2. Il suffira de faire en sorte que, de ce sommet n° 2 lui-même, l'aspect soit

$$5\ 6\ \ldots\ n\ 3\ 4\ 1,$$

ce qui est toujours possible si l'on est maître de distribuer les n sommets à volonté, puisqu'il suffit de mener à partir du sommet n° 2 un faisceau de $n - 2$ droites et de prendre pour sommets, dans l'ordre convenable, leurs intersections avec le faisceau émané du sommet 1.

Cela fait, il y aura une des régions contiguës au sommet 2 pour laquelle ce sommet viendra s'intercaler dans l'aspect 5 6 ... n 3 4 1, entre n et 3, et cette région sera celle qui répond à la question.