

BULLETIN DE LA S. M. F.

C. LE PAIGE

Sur la règle de multiplication des déterminants

Bulletin de la S. M. F., tome 9 (1881), p. 67-69

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__67_1

© Bulletin de la S. M. F., 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur la règle de multiplication des déterminants;
par M. C. LE PAIGE.

(Séance du 4 février 1881.)

Soient les trois déterminants

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

où

$$(1) \quad c_{ik} = a_{i1}b_{k1} + a_{i2}b_{k2} + \dots + a_{in}b_{kn} = a_{i1}b_{k1} + d_{ik}.$$

Nous représentons par A_{pq} , B_{pq} les mineurs de a_{pq} , b_{pq} dans les déterminants A et B.

Cela posé, si nous multiplions le déterminant C par A_{11} , en multipliant par A_{11} les éléments de la première rangée, et que nous ajoutons à cette première rangée les $n - 1$ dernières, respectivement multipliées par A_{21} , A_{31} , ..., A_{n1} , nous aurons, en ayant égard aux relations (1) et aux identités

$$a_{1r}A_{11} + a_{2r}A_{21} + \dots + a_{nr}A_{n1} = \frac{A}{a_{rr}},$$

suivant que r est égal à 1 ou est différent de 1,

$$CA_{11} = A \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \quad (1).$$

Multiplions les deux membres de cette identité par B_{11} , et ajoutons à la première colonne du déterminant qui figure dans le second membre les $(n - 1)$ dernières, respectivement multipliées par B_{21} , B_{31} , ..., B_{n1} ; nous aurons

$$CA_{11}B_{11} = AB \begin{vmatrix} 1 & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ a_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Or, en retranchant des $(n - 1)$ dernières colonnes de ce déterminant la première, successivement multipliée par b_{21} , b_{31} , ..., b_{n1} , nous trouvons, à cause de (1),

$$CA_{11}B_{11} = AB \begin{vmatrix} d_{22} & d_{23} & \dots & d_{2n} \\ d_{32} & d_{33} & \dots & d_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n2} & d_{n3} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix} = AB.D.$$

Il est visible que D est formé à l'aide de A_{11} , B_{11} , comme C au

(¹) Cette formule se trouve également dans une petite Notice de M. Édouard Weyr (*Sitzb. der kön. böhm. Gesellschaft der Wiss.* Prague, 1880) et dans notre Mémoire *Sur quelques points de la théorie des formes algébriques* (*Mém. de la Soc. royale des Sciences de Liège.* 1880).

moyen de A et B. En conséquence, si la règle de multiplication est vraie pour deux déterminants d'ordre $n - 1$, elle est vraie pour deux déterminants d'ordre n .

Puisqu'elle est évidente pour $n = 2$, elle est générale.
