

BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HUMBERT

**Sur une généralisation de la théorie des fractions
continues algébriques (suite)**

Bulletin de la S. M. F., tome 9 (1881), p. 24-30

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__24_1>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__24_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques; par M. G. HUMBERT.

[Suite (1)].

(Séance du 2 juillet 1880.)

Remarque. — On démontrerait de la même manière que, si des polynômes $R_1(x), R_2(x), \dots, R_n(x)$, de degrés quelconques, satisfont à la même relation que les polynômes $P(x)$, à savoir

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} R_1(z) \Pi_{(m+1)n-2}(z) dz + \dots \\ + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{K(z)}{\Delta(z)} R_n(z) \Pi_{(m+1)n-2}(z) dz = 0,$$

la somme du nombre des racines de $R_1(z)$ comprises entre x_0

(1) Voir le t. VIII de ce *Bulletin*, p. 191.

et x_1 , du nombre des racines de $R_2(z)$ comprises entre x_1 et x_2 , etc., du nombre des racines de $R_n(z)$ comprises entre x_{n-1} et x_n , est au moins égale à mn .

Plus généralement, en désignant par $f(z)$ une fonction qui ne change pas de signe entre x_0 et x_1 , entre x_1 et x_2 , etc., entre x_{n-1} et x_n , si on a la relation

$$\int_{x_0}^{x_1} f(z) R_1(z) P_\mu(z) dz + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(z) R_n(z) P_\mu(z) dz,$$

où $P_\mu(z)$ désigne un polynôme quelconque, au plus de degré μ , on en conclut que la somme du nombre des racines de $R_1(z)$ comprises entre x_0 et x_1 , etc., du nombre des racines de $R_n(z)$ comprises entre x_{n-1} et x_n , est au moins $\mu - n + 2$. Ce théorème ne cesse d'être vrai que si tous les polynômes $R(z)$ sont nuls.

Dans le cas de $n = 2$, par exemple, si l'on a

$$\int_{x_0}^{x_1} f(z) R_1(z) P_\mu(z) dz + \int_{x_1}^{x_2} f(z) R_2(z) P_\mu(z) dz = 0,$$

la somme du nombre des racines de $R_1(z)$ comprises entre x_0 et x_1 et du nombre des racines de $R_2(z)$ comprises entre x_1 et x_2 est au moins égale à μ .

Si la somme des degrés de $R_1(z)$ et de $R_2(z)$ était inférieure à μ , il est clair que le théorème précédent donnerait un résultat absurde; on en conclut alors que

$$R_1(z) = 0,$$

$$R_2(z) = 0.$$

Même conclusion dans le cas général si la somme des degrés des polynômes $R(z)$ était inférieure à $\mu - n + 2$.

THÉOREME II. — *Les polynômes $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$ satisfont à une équation différentielle d'ordre $n + 1$, dans laquelle le coefficient d'une dérivée quelconque $\frac{d^k y}{dx^k}$ est un polynôme entier en x , de degré μ .*

On a en effet

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_1(z) \Pi_{(m+1)n-2}(z) dz = 0;$$

on en conclut

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} K(z) P_1'(z) \Pi_{mn-2}(z) dz = 0,$$

en désignant par $P_1'(z)$ la dérivée de $P_1(z)$ et par $\Pi_{mn-2}(z)$ un polynôme entier en z quelconque, de degré inférieur ou égal à $mn - 2$.

On a en effet, après une intégration par parties,

$$\begin{aligned} & \sum \int_{x_0}^{x_1} K(z) P_1'(z) \Pi_{mn-2}(z) dz \\ &= \sum [K(z) P_1(z) \Pi_{mn-2}(z)]_{x_0}^{x_1} - \sum \int_{x_0}^{x_1} P_1(z) d[K(z) \Pi_{mn-2}(z)]. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} P_1(z) d[K(z) \Pi_{mn-2}(z)] \\ &= \int_{x_0}^{x_1} P_1(z) \frac{K(z)}{\Delta(z)} [\Pi_{mn-2}'(z) \Delta(z) + \Pi_{mn-2}(z) G(z)]. \end{aligned}$$

Mais le polynôme entre crochets

$$\Pi_{mn-2}'(z) \Delta(z) + \Pi_{mn-2}(z) G(z) = \chi(z)$$

est au plus de degré $(m+1)n - 2$; donc la somme

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} P_1(z) \frac{K(z)}{\Delta(z)} \chi(z) dz$$

sera nulle, en vertu de la relation fondamentale.

D'ailleurs, la fonction

$$K(z) P_1(z) \Pi_{mn-2}(z)$$

s'annule avec $K(z)$ pour les valeurs

$$z = x_0, \quad z = x_1, \quad \dots, \quad z = x_n;$$

il reste donc

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} K(z) P_1'(z) \Pi_{mn-2}(z) dz = 0.$$

On aura de même

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} K(z) \Delta(z) P_1''(z) \Pi_{(m-1)n-2}(z) dz = 0,$$

.....

et en général

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} K(z) \Delta^\mu(z) P_1^{(\mu+1)}(z) \Pi_{(m-\mu)n-2}(z) dz = 0.$$

Ce sont ces relations qui vont nous donner la démonstration du théorème énoncé.

Pour simplifier les calculs, je donnerai cette démonstration dans le cas de $n = 2$; on verra aisément que la démonstration est générale.

Je remarque d'abord que de la relation

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} K(z) \Delta^\mu(z) P_1^{(\mu+1)}(z) \Pi_{(m-\mu)n-2}(z) dz = 0$$

je puis déduire, puisque $K(z)$ s'annule pour $z = x_0, x_1, \dots, x_n$,

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} d[K(z) \Delta^\mu(z) P_1^{(\mu+1)}(z)] \Pi_{(m-\mu)n-1}(z) = 0.$$

Les Π désignent toujours des polynômes quelconques de degré égal ou inférieur à l'indice.

Dans le cas de $n = 2$, considérons les trois équations

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_1(z) \Pi_{2m}(z) dz + \int_{x_1}^{x_2} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_2(z) \Pi_{2m}(z) dz &= 0, \\ \int_{x_0}^{x_1} K(z) P_1'(z) \Pi_{2m-2}(z) dz + \int_{x_1}^{x_2} K(z) P_2'(z) \Pi_{2m-2}(z) dz &= 0, \\ \int_{x_0}^{x_1} d[K(z) \Delta(z) P_1''(z)] \Pi_{2m-3}(z) dz \\ + \int_{x_1}^{x_2} d[K(z) \Delta(z) P_2''(z)] \Pi_{2m-3}(z) dz &= 0. \end{aligned}$$

Dans la première de ces équations, posons

$$\Pi_{2m}(z) = C\Delta(z)\Pi_{2m-3}(z),$$

ce qui est possible, puisque $\Delta(z)$ est du troisième degré (C désigne une constante arbitraire); dans la seconde, posons

$$\Pi_{2m-2}(z) = (Az + B)(z)\Pi_{2m-3},$$

et ajoutons les trois équations : il vient

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} K(z) \{ \Delta(z) P_1''(z) + [G(z) + \Delta'(z)] P_1'(z) + (Az + B) P_1'(z) + CP_1(z) \} \Pi_{2m-3}(z) = 0.$$

La fonction entre accolades est un polynôme de degré m au plus; il en est de même de la fonction analogue en $P_2(z)$, qui ne diffère de celle qui est écrite que par la substitution de $P_2(z)$ à $P_1(z)$.

Soient

$$P_1(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \dots,$$

$$P_2(z) = B_0 z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + \dots,$$

$$\Delta(z) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

et

$$G(z) = Dx^2 + Ex + F.$$

Le coefficient du terme en z^m dans la première fonction sera

$$A_0 [m(m-1)(m-2) + (D+3)m(m-1) + Am + C].$$

Dans la seconde, ce sera B_0 , multiplié par le même facteur.

De même, le coefficient du terme en z^{m-1} sera, dans la première fonction, de la forme

$$A_0(aA + bB + cC + d) + A_1(a'A + b'B + c'C + d'),$$

$a, b, c, d, a', b', c', d'$ étant des constantes faciles à former et dont quelques-unes peuvent être nulles.

Dans la seconde fonction, ce coefficient aura la même forme; il suffira de remplacer A_0 par B_0 et A_1 par B_1 .

Or nous pouvons disposer des coefficients A, B, C de manière à

satisfaire aux trois équations

$$\begin{aligned} m(m-1)(m-2) + (D+3)m(m-1) + Am + C &= 0, \\ aA + bB + cC + d &= 0, \\ a'A + b'B + c'C + d' &= 0. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la fonction

$$\Delta(z)P_1'''(z) + [G(z) + \Delta'(z)]P_1''(z) + (Az + B)P_1'(z) + CP_1(z)$$

sera au plus de degré $m-2$.

Il en sera de même de la fonction analogue en $P_2(z)$.

Désignons pour un instant ces fonctions par $R_1(z)$ et $R_2(z)$; on a trouvé

$$\int_{x_0}^{x_1} K(z)R_1(z)\Pi_{2m-3}(z)dz + \int_{x_1}^{x_2} K(z)R_2(z)\Pi_{2m-3}(z)dz = 0.$$

Or, d'après une remarque faite plus haut, la somme du nombre des racines de $R_1(z)$ comprises entre x_0 et x_1 et du nombre des racines de $R_2(z)$ comprises entre x_1 et x_2 est au moins égale à $2m-3$. Mais, ces deux polynômes étant au plus de degré $m-2$, cette proposition est absurde; il faut donc conclure que l'on a

$$R_1(z) = 0, \quad R_2(z) = 0$$

ou

$$\Delta(z)y'''(z) + [G(z) + \Delta'(z)]y''(z) + (Az + B)y'(z) + Cy(z) = 0,$$

y désignant l'un des polynômes $P_1(z)$, $P_2(z)$. Cette relation démontre le théorème énoncé.

Dans le cas général, on donnerait du théorème II une démonstration tout à fait analogue et on arriverait à une équation de la forme indiquée.

Détermination de A, B, C. — Les équations qui déterminent ces constantes sont, en posant

$$\begin{aligned} \Delta &= \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \\ G &= Dx^2 + Ex + F, \\ \alpha m(m-1)(m-2) + (D+3\alpha)m(m-1) + Am + C &= 0, \\ \alpha(m-1)(m-2)(m-3) \\ &+ (D+3\alpha)(m-1)(m-2) + A(m-1) + C = 0, \\ \beta m(m-1)(m-2) + (E+2\beta)m(m-1) + Bm &= 0. \end{aligned}$$

On suppose $m \geq 2$.

Le déterminant des inconnues, étant

$$\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \end{vmatrix} = m,$$

n'est nul que si $m = 0$, c'est-à-dire si les polynômes $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont des constantes ; mais alors les équations précédentes ne s'appliquent pas. On aurait dans ce cas $C = 0$, quels que soient A et B, ce qui est évident *a priori*.

(A suivre.)
