BULLETIN DE LA S. M. F.

GENTY

Étude sur les courbes gauches unicursales

Bulletin de la S. M. F., tome 9 (1881), p. 115-162
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__115_1>

Étude sur les courbes gauches unicursales;

par M. Genty.

(Séance du 1er juillet 1881.)

I. — *Considérations générales.*

1. Soient f_1, f_2, f_3, f_4 quatre fonctions d'une variable arbitraire t; les équations

$$x : y : z : w = f_1 : f_2 : f_3 : f_4,$$

ou, sous une forme plus simple,

$$f_1 : f_2 : f_3 : f_4$$

représentent une courbe C, lieu des points m qu'on obtient en donnant successivement à la variable t toutes les valeurs possibles.

Lorsque les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 seront des fonctions algébriques et entières de degré m par rapport à la variable t, je dirai que la courbe C est une courbe *unicursale* ou *rationnelle* d'ordre m.

2. Soient de même F_1, F_2, F_3, F_4 quatre fonctions de deux variables arbitraires indépendantes t et u, les équations

$$x : y : z : w = F_1 : F_2 : F_3 : F_4,$$

ou simplement

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4,$$

représentent une surface S, lieu des courbes en nombre infini qu'on peut obtenir en établissant une relation quelconque entre les variables t et u.

3. Les équations

$$x : y : z = f_1 : f_2 : f_3,$$

dans lesquelles il n'entre qu'une seule variable arbitraire, représentent, soit le cône qui a son sommet au point w et qui contient la courbe gauche C, soit la perspective de cette courbe sur le plan $w = 0$, l'œil étant placé au sommet w du tétraèdre de référence.

4. Les points d'intersection de la courbe C avec le plan

$$lx + my + nz + pw = 0$$

sont donnés par l'équation

$$lf_1 + mf_2 + nf_3 + pf_4 = 0. \tag{1}$$

Dans le cas des courbes rationnelles d'ordre m, cette équation est algébrique et d'ordre m. Donc un plan coupe une courbe unicursale d'ordre m en m points.

5. Lorsque l'équation (1) du paragraphe précédent est identique, la courbe C est située tout entière dans le plan donné.

Réciproquement, pour que la courbe C soit plane, il faut qu'on puisse trouver un plan

$$lx + my + nz + pw = 0$$

qui la contienne tout entière, et tel, par suite, que l'équation

$$lf_1 + mf_2 + nf_3 + pf_4 = 0$$

soit satisfaite identiquement. On obtient ainsi, dans le cas d'une courbe rationnelle, $m + 1$ équations entre lesquelles il restera à éliminer l, m, n et p, ce qui donnera en tout $m - 2$ conditions.

Pour $m = 2$, il n'y a aucune condition à remplir, et, par suite, toute courbe unicursale du second ordre est une courbe plane.

Soient, en effet,

$$a_1 t^2 + b_1 t + c_1 : a_2 t^2 + b_2 t + c_2 : a_3 t^2 + b_3 t + c_3 : a_4 t^2 + b_4 t + c_4$$

les équations générales d'une conique; on reconnaît immédiatement que cette courbe est située dans le plan qui a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour $m = 3$, les équations de la courbe sont

$$a_1 t^3 + b_1 t^2 + c_1 t + d_1 : a_2 t^3 : b_2 t^2 + c_2 t + d_2 : \ldots,$$

et l'on voit immédiatement que la condition à remplir pour qu'elle soit plane est

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

6. On obtient de même les conditions qui doivent être remplies pour que la courbe C puisse être placée tout entière sur une quadrique. Il suffit, en effet, de considérer l'équation d'une quadrique quelconque, d'y remplacer les coordonnées courantes x, y, z et w par f_1, f_2, f_3 et f_4 respectivement, et d'exprimer que l'équation en t ainsi obtenue est identique. On obtiendra un certain nombre de conditions entre lesquelles on éliminera les dix coefficients inconnus qui entrent dans l'équation de la quadrique.

Pour $m = 2$, on n'a que cinq équations qui ne suffisent pas pour déterminer ces dix coefficients; donc, on peut placer une conique sur une infinité de quadriques.

Pour $m = 3$, on n'a que sept équations; on peut donc faire passer une infinité de quadriques par une cubique gauche.

Pour $m = 4$, on a neuf équations, qui déterminent complètement une quadrique contenant la courbe. Ainsi, en général, on ne peut faire passer qu'une seule quadrique par une quartique gauche rationnelle.

En général, en éliminant les dix coefficients inconnus entre les $2m + 1$ équations de condition, on obtient $2m - 8$ relations pour exprimer que la courbe C peut être placée sur une quadrique.

7. *Un cône ayant son sommet en un point quelconque p et passant par une courbe unicursale d'ordre m a* $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ *arêtes doubles;*

Ou bien,

La perspective d'une courbe unicursale d'ordre m, l'œil étant placé en un point quelconque, est une courbe plane unicursale.

Le cône qui passe par la courbe et dont le sommet est au point w, supposé quelconque, a évidemment pour équations

$$(3) \qquad x:y:z = f_1:f_2:f_3.$$

Pour que ce cône ait une arête double, il faut qu'on puisse trouver deux valeurs t et τ de la variable satisfaisant aux équations

$$(1) \qquad \frac{f_1(t)}{f_1(\tau)} = \frac{f_2(t)}{f_2(\tau)} = \frac{f_3(t)}{f_3(\tau)}.$$

Il reste à faire voir que, dans le cas où f_1, f_2 et f_3 sont des fonctions entières de degré m, le système des équations (1) a $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ solutions distinctes. Voici une démonstration assez simple de ce théorème bien connu.

Les équations (1) peuvent se mettre sous la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} f_2(t)f_3(\tau) - f_2(\tau)f_3(t) = 0, \\ f_3(t)f_1(\tau) - f_3(\tau)f_1(t) = 0, \\ f_1(t)f_2(\tau) - f_1(\tau)f_2(t) = 0. \end{cases}$$

Ces trois équations, si l'on y considère t et τ comme des coordonnées cartésiennes, représentent des courbes dont les points communs auront pour coordonnées les valeurs cherchées de t et τ. Les premiers membres de ces équations débarrassées du facteur $t-\tau$ sont d'ordre $m-1$ en t et τ, et, comme ils sont symétriques par rapport à ces deux variables, ils sont de la forme

$$At^{m-1}\tau^{m-1} + \ldots,$$

le degré des termes négligés étant inférieur à celui du premier.

Les courbes représentées par les deux premières équations (2) ont donc $4(m-1)^2$ points communs. Mais elles ont toutes deux à l'infini, sur chacun des axes, un point multiple d'ordre $m-1$, et ces points comptent pour $2(m-1)^2$ points d'intersection qui ne conviennent pas à la question.

D'un autre côté, ces mêmes courbes ont, parmi leurs points communs, tous ceux qui ont pour coordonnées deux racines quelconques différentes de l'équation

$$f_3(t)=0,$$

et ces points, dont le nombre est égal à $n(n-1)$, ne sont pas situés sur la troisième courbe. Donc, enfin, le nombre des points communs aux trois courbes qui conviennent à la question est égal à

$$4(n-1)^2-2(n-1)^2-n(n-1)=(n-1)(n-2).$$

D'ailleurs, à un point d'intersection ayant pour abscisse λ et pour ordonnée μ, en correspond un autre ayant pour abscisse μ et pour ordonnée λ, et ces deux points fournissent évidemment le même point double. Donc le nombre des points doubles apparents de la courbe gauche est égal à $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

II. — *Du nombre des conditions nécessaires pour déterminer une courbe unicursale d'ordre m.*

8. Les équations générales d'une courbe gauche unicursale étant mises sous la forme

$$(1)\qquad f_1:f_2:f_3:f_4,$$

on voit immédiatement qu'elles renferment $4(m+1)$ coefficients. Mais la variable indépendante t peut évidemment être remplacée par une autre τ, liée avec elle par une équation de la forme

$$at\tau+bt+c\tau+d=0,$$

et l'on peut disposer des coefficients a, b, c et d de manière à donner à quatre des coefficients de la courbe des valeurs choisies à volonté. En d'autres termes, il n'existe dans les équations (1) que $4(m+1)-4=4m$ coefficients véritablement arbitraires ; ce qui montre qu'il faut $4m$ conditions pour déterminer une courbe gauche rationnelle d'ordre m.

9. On peut encore arriver à ce résultat de la manière suivante.

Remarquons d'abord qu'un point donné d'une courbe gauche équivaut à deux conditions. En effet, si le point (x_1, y_1, z_1, w_1) est situé sur la courbe, on pourra trouver une valeur de t satisfaisant aux relations

$$x_1 : y_1 : z_1 : w_1 = f_1 : f_2 : f_3 : f_4.$$

En éliminant t entre ces trois équations, on obtient deux relations entre les coefficients des équations de la courbe.

Ou encore, si le point donné est le sommet w du tétraèdre de référence, les équations de la courbe peuvent se mettre sous la forme

$$(1) \qquad \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \frac{f_4}{t-\alpha},$$

φ_1, φ_2, φ_3 étant des fonctions d'ordre $m-1$ seulement, et l'on voit qu'elles renferment deux coefficients de moins que les équations générales.

Si α est donné, les équations ci-dessus renferment trois coefficients de moins que les équations générales. Ainsi un point donné pour une valeur donnée de la variable équivaut à trois conditions.

Ceci posé, étant donnés trois points d'une courbe, on peut faire en sorte que ces trois points correspondent à des valeurs données d'une variable indépendante convenablement choisie. Soient, en effet, t_1, t_2, t_3 les valeurs de la variable actuelle qui correspondent aux points donnés ; τ la nouvelle variable à introduire ; τ_1, τ_2, τ_3 les valeurs données de cette variable qui doivent correspondre aux points donnés. On établira entre t et τ une relation de la forme

$$at\tau + bt + c\tau + d = 0,$$

et l'on déterminera les coefficients a, b, c et d, à l'aide des relations

$$at_1\tau_1 + bt_1 + c\tau_1 + d = 0,$$
$$at_2\tau_2 + bt_2 + c\tau_2 + d = 0,$$
$$at_3\tau_3 + bt_3 + c\tau_3 + d = 0.$$

En éliminant a, b, c et d entre les quatre équations qui précèdent, on obtient la relation qui lie t et τ sous la forme

$$\begin{vmatrix} t\tau & t & \tau & 1 \\ t_1\tau_1 & t_1 & \tau_1 & 1 \\ t_2\tau_2 & t_2 & \tau_2 & 1 \\ t_3\tau_3 & t_3 & \tau_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

D'après cela, on peut considérer trois points donnés d'une courbe comme équivalant à neuf conditions. Comme, d'ailleurs, l'un des coefficients peut toujours être supposé égal à 1, il manque encore

$$4m + 3 - 9 = 4m - 6$$

conditions pour déterminer la courbe, soit $2m - 3$ points, qui avec les trois points donnés font en tout $2m$ points.

10. Le problème qui consiste à trouver les équations d'une courbe gauche, connaissant $4m$ conditions auxquelles cette courbe doit satisfaire, peut être impossible ou indéterminé. Il sera impossible toutes les fois que les conditions données sont incompatibles avec l'existence même de la courbe en question ou d'une courbe plane du même ordre. Le problème sera au contraire indéterminé quand les conditions données, incompatibles avec l'existence d'une courbe gauche, sont au contraire compatibles avec l'existence d'une courbe plane du même ordre. Un exemple suffira pour éclaircir la remarque qui précède.

Une cubique gauche est déterminée par six points; mais, si quatre des points donnés sont dans un même plan, le problème est impossible, puisqu'un plan ne peut pas rencontrer une cubique gauche en plus de trois points. Mais si les six points donnés sont dans un même plan, il y aura une infinité de cubiques planes satisfaisant à la question, puisqu'il faut huit points pour déterminer une cubique plane unicursale, et le problème sera indéterminé.

11. Comme application, cherchons les équations d'une cubique gauche déterminée par six points, savoir les quatre sommets du tétraèdre de référence, et les points (x_1, y_1, z_1, w_1) et (x_2, y_2, z_2, w_2).

Les équations générales d'une cubique gauche circonscrite au tétraèdre de référence sont évidemment

$$\frac{a_1}{t-\alpha} : \frac{a_2}{t-\beta} : \frac{a_3}{t-\gamma} : \frac{a_4}{t-\delta}.$$

Nous supposerons, ce qui est permis (9), que les deux autres points doivent correspondre aux valeurs $t = \infty$ et $t = 0$ de la variable, et nous aurons

$$x_1 : y_1 : z_1 : w_1 = a_1 : a_2 : a_3 : a_4$$

$$x_2 : y_2 : z_2 : w_2 = \frac{a_1}{\alpha} : \frac{a_2}{\beta} : \frac{a_3}{\gamma} : \frac{a_4}{\delta};$$

d'où

$$a_1 = x_1, \quad a_2 = y_1, \quad a_3 = z_1, \quad a_4 = w_1;$$

$$\alpha = \frac{x_1}{x_2}, \quad \beta = \frac{y_1}{y_2}, \quad \gamma = \frac{z_1}{z_2}, \quad \delta = \frac{w_1}{w_2}.$$

De sorte que les équations de la cubique sont

$$\frac{x_1 x_2}{t x_2 - x_1} : \frac{y_1 y_2}{t y_2 - y_1} : \frac{z_1 z_2}{t z_2 - z_1} : \frac{w_1 w_2}{t w_2 - w_1}.$$

12. Cherchons encore les équations générales des quartiques qui passent par sept points donnés, savoir les quatre sommets du tétraèdre de référence et les points (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) et (x_3, y_3, z_3, w_3).

Une quartique circonscrite au tétraèdre de référence et passant au point (x_1, y_1, z_1, w_1) pour $t = \infty$ a pour équations

$$\frac{x_1(t-\alpha_1)}{t-\alpha} : \frac{y_1(t-\beta_1)}{t-\beta} : \frac{z_1(t-\gamma_1)}{t-\gamma} : \frac{w_1(t-\delta_1)}{t-\delta}.$$

Si cette courbe doit passer au point (x_2, y_2, z_2, w_2) pour $t = 0$, on aura

$$\frac{x_1\alpha_1}{x_2\alpha} = \frac{y_1\beta_1}{y_2\beta} = \frac{z_1\gamma_1}{z_2\gamma} = \frac{w_1\delta_1}{w_2\delta} = \lambda,$$

λ étant une indéterminée, et l'on aura, pour les équations de la courbe,

$$\frac{x_1 t - \lambda\alpha x_2}{t-\alpha} : \frac{y_1 t - \lambda\beta y_2}{t-\beta} : \frac{z_1 t - \lambda\gamma z_2}{t-\gamma} : \frac{w_1 t - \lambda\delta w_2}{t-\delta}.$$

Si enfin la courbe doit passer au point (x_3, y_3, z_3, w_3) pour $t = 1$, on aura

$$\frac{\dfrac{x_1 - \lambda\alpha x_2}{1-\alpha}}{x_3} = \frac{\dfrac{y_1 - \lambda\beta y_2}{1-\beta}}{y_3} = \frac{\dfrac{z_1 - \lambda\gamma z_2}{1-\gamma}}{z_3} = \frac{\dfrac{w_1 - \lambda\delta w_2}{1-\delta}}{w_3} = \mu,$$

μ étant une nouvelle indéterminée. Des équations précédentes, on tire

$$\alpha = \frac{\mu x_3 - x_1}{\mu x_3 - \lambda x_2}, \quad \beta = \frac{\mu y_3 - y_1}{\mu y_3 - \lambda y_2}, \quad \gamma = \frac{\mu z_3 - z_1}{\mu z_3 - \lambda z_2}, \quad \delta = \frac{\mu w_3 - w_1}{\mu w_3 - \lambda w_2},$$

et les équations de la courbe deviennent

$$\begin{aligned} &\frac{t x_1(\mu x_3 - \lambda x_2) - \lambda x_2(\mu x_3 - x_1)}{t(\mu x_3 - \lambda x_2) - (\mu x_3 - x_1)} \\ &: \frac{t y_1(\mu y_3 - \lambda y_2) - \lambda y_2(\mu y_3 - y_1)}{t(\mu y_3 - \lambda y_2) - (\mu y_3 - y_1)} \\ &: \frac{t z_1(\mu z_3 - \lambda z_2) - \lambda z_2(\mu z_3 - z_1)}{t(\mu z_3 - \lambda z_2) - (\mu z_3 - z_1)} \\ &: \frac{t w_1(\mu w_3 - \lambda w_2) - \lambda w_2(\mu w_3 - w_1)}{t(\mu w_3 - \lambda w_2) - (\mu w_3 - w_1)}; \end{aligned}$$

elles ne renferment plus que deux coefficients inconnus : donc un point de plus suffira pour déterminer la courbe; on reconnaît d'ailleurs sans peine qu'il passe huit quartiques gauches unicursales par huit points donnés.

13. Une courbe gauche rationnelle d'ordre n n'a point, en général, de point double, ni à plus forte raison de point multiple d'un ordre de multiplicité supérieur à 2. En effet, il faut qu'on puisse trouver deux valeurs t et τ de la variable telles qu'on ait

$$(1) \qquad \frac{f_1(t)}{f_1(\tau)} = \frac{f_2(t)}{f_2(\tau)} = \frac{f_3(t)}{f_3(\tau)} = \frac{f_4(t)}{f_4(\tau)}.$$

Or ces relations fournissent trois équations distinctes entre t et τ, qui n'ont en général aucune solution.

Si on élimine t et τ entre ces équations, on obtient la condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients des équations de la courbe pour qu'elle ait un point double. On voit donc que la condition d'existence d'un point double est une condition simple.

Réciproquement, si cette condition est remplie, on pourra tirer des équations qui précèdent le système des valeurs t et τ de la variable qui correspondent au point double. Si ces valeurs sont réelles et inégales, le point correspondant est un véritable point double, c'est-à-dire un point de croisement de deux branches réelles de la courbe. Si ces valeurs sont imaginaires, on a un point isolé. Si enfin $t=\tau$, le point correspondant est un point stationnaire ou de rebroussement. On voit, par suite, que deux conditions doivent être remplies pour que la courbe ait un point de rebroussement.

On obtient les conditions pour que la courbe ait deux points doubles en écrivant que les équations (1) ont deux systèmes de solutions communes, et ainsi de suite.

14. De même, pour que la courbe ait un point triple, il faut qu'on puisse trouver un système de trois valeurs t, τ et θ de la variable satisfaisant aux équations

$$\begin{aligned} f_1(t):f_2(t):f_3(t):f_4(t) &= f_1(\tau):f_2(\tau):f_3(\tau):f_4(\tau) \\ &= f_1(\theta):f_2(\theta):f_3(\theta):f_4(\theta). \end{aligned}$$

Or ces relations fournissent six équations entre lesquelles on pourra éliminer t, τ et θ; on obtiendra ainsi trois conditions auxquelles la courbe doit satisfaire.

En continuant ainsi, on voit sans peine que la condition d'existence d'un point multiple d'ordre n équivaut à

$$3(n-1)-n=2n-3$$

conditions simples.

15. Un point double donné d'une courbe gauche équivaut à quatre conditions ou à deux points simples. En effet, si le point double donné est le point w, les équations de la courbe pouvant se mettre sous la forme

$$\varphi_1:\varphi_2:\varphi_3:\frac{f_4}{(t-\alpha)(t-\beta)},$$

φ_1, φ_2, φ_3 étant des fonctions d'ordre $m-2$, et α et β pouvant être des quantités réelles ou imaginaires; et l'on voit que ces équations renferment quatre coefficients de moins que les équations générales.

Un point triple équivaut de même à six conditions; et en général, un point multiple d'ordre n donné équivaut à $2n$ conditions, c'est-à-dire à n points simples.

16. Si le point w est un point de rebroussement, les équations de la courbe pourront se mettre sous la forme

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \frac{f_4}{(t-\alpha)^2},$$

et l'on reconnaît sans peine qu'elles renferment cinq coefficients de moins que les équations générales; un point de rebroussement équivaut donc à cinq conditions.

17. Il est clair que si, dans les conditions qui doivent déterminer une courbe gauche rationnelle, on fait entrer l'existence d'un ou de plusieurs points multiples, on en pourra arriver à des cas d'impossibilité ou d'indétermination. On sait, par exemple, qu'une courbe gauche d'ordre m ne peut pas avoir un point multiple d'ordre $m-1$, puisqu'un plan mené par ce point et deux autres points de la courbe la couperait en $m+1$ points, ce qui est impossible.

Si donc, pour déterminer une courbe gauche d'ordre m, on donne un point multiple d'ordre $m-1$, le problème sera en général impossible. Mais si les conditions données conviennent à une courbe plane d'ordre m (qui peut avoir un point multiple d'ordre $m-1$), le problème deviendra, en général, indéterminé.

18. Comme nouvel exemple de détermination d'une courbe gauche, nous allons chercher les équations générales d'une quartique gauche ayant un point de rebroussement au point x, passant aux trois autres sommets du tétraèdre de référence, et en deux autres points donnés (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2).

Les équations de la courbe sont de la forme

$$\frac{a_1 t + b_1}{(t-\alpha)^2} : \frac{a_2}{t-\beta} : \frac{a_3}{t-\gamma} : \frac{a_4}{t-\delta}.$$

Si nous supposons que les deux points donnés doivent correspondre aux valeurs $t = \infty$ et $t = 0$ de la variable, nous aurons

$$x_1 : y_1 : z_1 : w_1 = a_1 : a_2 : a_3 : a_4,$$
$$x_2 : y_2 : z_2 : w_2 = \frac{b_1}{\alpha^2} = -\frac{y_1}{\beta} = -\frac{z_1}{\gamma} = -\frac{w_1}{\delta};$$

et l'on pourra prendre

$$a_1 = x_1, \quad a_2 = y_1, \quad a_3 = z_1, \quad a_4 = w_1,$$
$$b_1 = \alpha^2 x_2, \quad \beta = -\frac{y_1}{y_2}, \quad \gamma = -\frac{z_1}{z_2}, \quad \delta = -\frac{w_1}{w_2}.$$

Les équations de la courbe deviennent alors

$$\frac{x_1 t + \alpha^2 x_2}{(t-\alpha)^2} : \frac{y_1}{t + \frac{y_1}{y_2}} : \frac{z_1}{t + \frac{z_1}{z_2}} : \frac{w_1}{t + \frac{w_1}{w_2}};$$

on voit qu'elles ne renferment plus qu'un seul coefficient indéterminé α.

La forme même de ces équations montre que toutes les quartiques qu'elles représentent sont situées sur un même cône quadrique

$$y : z : w = \frac{y_1}{t + \frac{y_1}{y_2}} : \frac{z_1}{t + \frac{z_1}{z_2}} : \frac{w_1}{t + \frac{w_1}{w_2}},$$

ayant son sommet au point stationnaire.

19. La condition de rencontrer une droite donnée est une condition simple, car si la droite donnée est l'arête xy du tétraèdre de référence, les équations de la courbe sont de la forme

$$f_1 : f_2 : (t-\alpha)\varphi_1 : (t-\alpha)\varphi_2,$$

et l'on voit qu'elles contiennent un coefficient de moins que les équations générales. Par exemple, les équations d'une cubique gauche rencontrant les six arêtes du tétraèdre de référence sont

$$a_1(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma) : a_2(t-\alpha)(t-\delta)(t-\varepsilon)$$
$$: a_3(t-\beta)(t-\delta)(t-\eta) : a_4(t-\gamma)(t-\varepsilon)(t-\eta),$$

et elles ne renferment plus que six coefficients réellement indéterminés.

La condition de toucher un plan est de même une condition simple; car si le plan donné est la face $x = o$ du tétraèdre de référence, les équations de la courbe seront de la forme

$$(t-\alpha)^2\varphi_1 : f_2 : f_3 : f_4,$$

et elles ne renferment que $4m+3$ coefficients.

Ainsi les équations d'une conique tangente aux quatre faces du tétraèdre de référence sont

$$a_1(t-\alpha)^2 : a_2(t-\beta)^2 : a_3(t-\gamma)^2 : a_4(t-\delta)^2.$$

Les points de contact ont pour coordonnées

$$\begin{array}{cccc}
o & a_2(\alpha-\beta)^2, & a_3(\alpha-\gamma)^2, & a_4(\alpha-\delta)^2, \\
a_1(\beta-\alpha)^2, & o, & a_3(\beta-\gamma)^2, & a_4(\beta-\delta)^2, \\
a_1(\gamma-\alpha)^2, & a_2(\gamma-\beta)^2, & o, & a_4(\gamma-\delta)^2, \\
a_1(\delta-\alpha)^2, & a_2(\delta-\beta)^2, & a_3(\delta-\gamma)^2, & o,
\end{array}$$

et l'on vérifie sans peine que ces quatre points sont situés dans un même plan.

Si l'on donne en outre deux points de la conique, elle sera complètement déterminée. Soient, en effet,

$$(x_1,\ y_1,\ z_1,\ w_1),\quad (x_2,\ y_2,\ z_2,\ w_2)$$

les deux points donnés, et supposons qu'ils doivent correspondre aux valeurs $t = \infty$ et $t = o$ de la variable. Nous aurons

$$\begin{aligned}
x_1 : y_1 : z_1 : w_1 &= a_1 : a_2 : a_3 : a_4, \\
x_2 : y_2 : z_2 : w_2 &= a_1\alpha^2 : a_2\beta^2 : a_3\gamma^2 : a_4\delta^2,
\end{aligned}$$

d'où

$$a_1 = x_1,\quad a_2 = y_1,\quad a_3 = z_1,\quad a_4 = w_1,$$

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{x_2}{x_1}},\quad \beta = \pm\sqrt{\frac{y_2}{y_1}},\quad \gamma = \pm\sqrt{\frac{z_2}{z_1}},\quad \delta = \pm\sqrt{\frac{w_2}{w_1}},$$

et les équations de la conique sont

$$x_1\left(t\mp\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\right)^2 : y_1\left(t\mp\sqrt{\frac{y_2}{y_1}}\right)^2 : z_1\left(t\mp\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}\right)^2 : w_1\left(t\mp\sqrt{\frac{w_2}{w_1}}\right)^2.$$

Ces équations ne représentent en réalité que huit coniques distinctes, car deux systèmes d'équations dans lesquels les radicaux correspondants ont des signes contraires représentent évidemment la même courbe.

Les plans de ces huit coniques ont pour équation générale

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ \sqrt{x_1 x_2} & \pm\sqrt{y_1 y_2} & \pm\sqrt{z_1 z_2} & \pm\sqrt{w_1 w_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Ces plans ont entre eux des relations de position très intéressantes, mais que nous ne pouvons étudier ici sans nous écarter un peu trop de notre sujet.

20. Cherchons encore les équations d'une conique qui rencontre les quatre côtés d'un quadrilatère gauche et qui passe par deux points donnés. Si les côtés du quadrilatère donné sont quatre arêtes du tétraèdre de référence, et si l'un des points donnés (x_1, y_1, z_1, w_1) correspond à la valeur $t = \infty$ de la variable, les équations de la conique seront de la forme

$$x_1(t-\alpha)(t-\beta) : y_1(t-\beta)(t-\gamma) : z_1(t-\gamma)(t-\delta) : w_1(t-\delta)(t-\alpha).$$

Supposons maintenant que le second point doive correspondre à la valeur o de la variable, on aura

$$\begin{aligned} x_1\alpha\beta &= x_2, \\ y_1\beta\gamma &= y_2, \\ z_1\gamma\delta &= z_2, \\ w_1\delta\alpha &= w_2; \end{aligned}$$

et ces équations montrent immédiatement que les deux points donnés ne peuvent pas être quelconques; elles donnent en effet

$$\text{(1)} \qquad \frac{x_2 z_2}{x_1 z_1} = \frac{y_2 w_2}{y_1 w_1};$$

ce qui montre que, le point (x_1, y_1, z_1, w_1) étant donné, le second point doit être situé sur la surface du second ordre, qui a pour équation

$$\text{(2)} \qquad \frac{xz}{x_1 z_1} = \frac{yw}{y_1 w_1}.$$

C'est qu'en effet toutes les coniques qui passent par le point (x_1, y_1, z_1, w_1), et qui rencontrent les côtés du quadrilatère gauche donné, sont situées sur la surface du second ordre déterminée par le quadrilatère et le point, et qui est représentée par l'équation (2).

Ainsi, en général, le problème est impossible; mais, si la condition (1) est satisfaite, il devient indéterminé.

III. — *Tangente.*

21. Les coordonnées d'un point d'une courbe gauche étant

$$f_1,\quad f_2,\quad f_3,\quad f_4,$$

celles d'un point infiniment voisin seront

$$f_1 + f'_1\,dt,\quad f_2 + f'_2\,dt,\quad f_3 + f'_3\,dt,\quad f_4 + f'_4\,dt,$$

f' désignant la dérivée de la fonction f prise par rapport à la variable t. Or ces deux points sont situés sur la droite qui a pour équations

$$(1)\qquad uf_1 + vf'_1 : uf_2 + vf'_2 : uf_3 + vf'_3 : uf_4 + vf'_4,$$

dans lesquelles on regarde t comme une constante et le rapport $\frac{u}{v}$ comme une variable arbitraire. Les équations (1) sont donc celles de la tangente à la courbe au point t.

Le point (f'_1, f'_2, f'_3, f'_4) est évidemment un point de la tangente; il correspond à $u = 0$.

22. Les équations

$$(1)\qquad x : y : z = uf_1 + vf'_1 : uf_2 + vf'_2 : uf_3 + vf'_3$$

représentent le plan mené par la tangente à la courbe gauche et le point w, c'est-à-dire le plan tangent au cône projetant la courbe sur le plan $w = 0$.

L'équation de ce plan, mise sous la forme ordinaire, est

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Les équations (1) peuvent être considérées comme représentant la tangente à la courbe plane, perspective de la courbe gauche sur le plan $w = 0$, l'œil étant placé au sommet opposé du tétraèdre de référence.

Si dans l'équation (2) on regarde x, y et z comme les coordonnées d'un point donné, elle donnera les points de contact des tangentes menées de ce point à la courbe plane. Or cette équation est évidemment de degré $2(m-1)$ en t; donc une courbe plane unicursale d'ordre m et de la classe $2(m-1)$.

Cette expression donne également le nombre des tangentes de la courbe gauche qui rencontrent une droite donnée, ou enfin l'ordre de sa développable osculatrice.

23. Les tangentes en un point double ou en un point multiple d'ordre quelconque s'obtiennent sans difficulté. Il suffit pour cela de remplacer, dans les équations générales de la tangente, t par les valeurs de cette variable qui correspondent au point double ou au point multiple.

Soit, par exemple, une courbe d'ordre m ayant un point triple, au sommet w du tétraèdre de référence. Ses équations seront de la forme

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \frac{f_4}{(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)},$$

et, en appliquant la règle précédente, on reconnaît sans peine que les points où les tangentes au point triple rencontrent le plan $w = 0$ ont respectivement pour coordonnées

$$\begin{array}{llll} \varphi_1(\alpha), & \varphi_2(\alpha), & \varphi_3(\alpha), & 0; \\ \varphi_1(\beta), & \varphi_2(\beta), & \varphi_3(\beta), & 0; \\ \varphi_1(\gamma), & \varphi_2(\gamma), & \varphi_3(\gamma), & 0. \end{array}$$

En sorte que les équations des tangentes sont, sous la forme ordinaire,

$$\frac{x}{\varphi_1(\alpha)} = \frac{y}{\varphi_2(\alpha)} = \frac{z}{\varphi_3(\alpha)},$$

$$\frac{x}{\varphi_1(\beta)} = \frac{y}{\varphi_2(\beta)} = \frac{z}{\varphi_3(\beta)};$$

et

$$\frac{x}{\varphi_1(\gamma)} = \frac{y}{\varphi_2(\gamma)} = \frac{z}{\varphi_3(\gamma)}.$$

Soit encore une quartique gauche ayant un point de rebroussement au point x et passant par les autres sommets du tétraèdre de référence. Les équations sont de la forme

$$\frac{a_1 t + b_1}{(t-\alpha)^2} : \frac{a_2}{t-\beta} : \frac{a_3}{t-\gamma} : \frac{a_4}{t-\delta},$$

et l'on reconnaît sans peine que la tangente au point de rebroussement rencontre la face opposée en un point qui a pour coordonnées

$$\mathrm{o}, \quad \frac{a_2}{\alpha-\beta}, \quad \frac{a_3}{\alpha-\gamma}, \quad \frac{a_4}{\alpha-\delta}.$$

Dans le cas où la quartique considérée passe par deux autres points fixes, a_2, a_3, a_4, β, γ et δ sont des quantités connues, et α est un coefficient variable (18). Dans ce cas, le lieu du point où la tangente de rebroussement perce le plan $x = \mathrm{o}$ a pour équations

$$y : z : w = \frac{a_2}{t-\beta} : \frac{a_3}{t-\gamma} : \frac{a_4}{t-\delta}.$$

C'est donc une conique circonscrite à la face du tétraèdre de référence située dans ce plan.

24. La condition de toucher une droite donnée est une condition triple. Si, par exemple, la droite zw est tangente à une courbe gauche rationnelle, les deux fonctions f_1, f_2 auront en commun un facteur $(t-\alpha)^2$; de sorte que les équations de la courbe pourront se mettre sous la forme

$$(t-\alpha)^2 \varphi_1 : (t-\alpha)^2 \varphi_2 : f_3 : f_4,$$

et elles contiennent trois coefficients de moins que les équations générales. Une tangente donnée avec son point de contact équivaut à quatre conditions, puisqu'alors on connaît la valeur de α qui entre dans les équations précédentes.

Les équations

$$a_1(t-\alpha)^2(t-\beta)^2$$
$$: a_2(t-\beta)^2(t-\gamma)^2 : a_3(t-\gamma)^2(t-\delta)^2 : a_4(t-\delta)^2(t-\alpha)_2$$

représentent évidemment une quartique gauche inscrite dans un quadrilatère gauche ayant les mêmes sommets que le tétraèdre de référence.

Les points de contact ont pour coordonnées

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & a_3(\beta-\gamma)^2 & a_4(\alpha-\beta)^2 \\ a_1(\beta-\gamma)^2 & 0 & 0 & a_4(\gamma-\delta)^2 \\ a_1(\alpha-\delta)^2 & a_1(\gamma-\delta)^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2(\alpha-\beta)^2 & a_3(\alpha-\delta)^2 & 0 \end{array}$$

et l'on a

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & (\beta-\gamma)^2 & (\alpha-\beta)^2 \\ (\beta-\gamma)^2 & 0 & 0 & (\gamma-\delta)^2 \\ (\alpha-\delta)^2 & (\gamma-\delta)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha-\beta)^2 & (\alpha-\delta)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 :$$

donc ces quatre points sont situés dans un même plan.

Deux autres points donnés suffiront pour déterminer la courbe ; mais il est facile de voir qu'elle a nécessairement un point double, et que, par suite, quinze conditions suffisent pour la déterminer. Donc les deux points donnés ne pourront pas être quelconques, et il devra exister entre leurs coordonnées une relation qu'il est facile de trouver.

Soient en effet (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) les coordonnées des points donnés, que nous supposerons devoir correspondre aux valeurs $t = \infty$ et $t = 0$ de la variable. Nous aurons

$$x_1 : y_1 : z_1 : w_1 = a_1 : a_2 : a_3 : a_4$$
$$x_2 : y_2 : z_2 : w_2 = a_1\alpha^2\beta^2 : a_2\beta^2\gamma^2 : a_3\gamma^2\delta^2 : a_4\delta^2\alpha^2,$$

d'où, en éliminant a_1, a_2, a_3, a_4, α, β, γ et δ,

$$\frac{x_2 z_2}{x_1 z_1} = \frac{y_2 w_2}{y_1 w_1},$$

résultat qu'on peut énoncer de la manière suivante : *Toutes les quartiques gauches unicursales inscrites dans un quadrilatère gauche et passant en un point donné sont situées sur la quadrique déterminée par le quadrilatère et le point* (¹).

(¹) *Note de la Rédaction.* — Ce résultat est immédiat si l'on remarque que, par l'une de ces courbes, passe une quadrique, et une seule, qui est évidemment celle de l'énoncé, puisque cette surface et la courbe considérée ont neuf points communs. H. P.

IV. — *Plan osculateur.*

25. Le plan osculateur au point t de la courbe gauche C est le plan mené par les trois points infiniment voisins

$$\begin{gathered}(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4),\\ (f_1+f'_1\,dt,\ \ f_2+f'_2\,dt,\ \ f_3+f'_3\,dt,\ \ f_4+f'_4\,dt),\\ (f_1+2f'_1\,dt+f''_1\,dt^2,\ \ f_2+2f'_2\,dt+f''_2\,dt^2,\ \ \ldots).\end{gathered}$$

Or ces trois points sont situés dans le plan qui a pour équations

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1+uf'_1+vf''_1\\ \quad : f_2+uf'_2+vf''_2 : f_3+uf'_3+vf''_3 : f_4+uf'_4+vf''_4,\end{cases}$$

ou bien, sous forme ordinaire,

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z & w\\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4\\ f'_1 & f'_2 & f'_3 & f'_4\\ f''_1 & f''_2 & f''_3 & f''_4\end{vmatrix}=0.$$

Les équations (1) ou (2) sont donc celles du plan osculateur.

Les points (f'_1, f'_2, f'_3, f'_4), $(f''_1, f''_2, f''_3, f''_4)$ sont deux points du plan osculateur de la courbe gauche au point (f_1, f_2, f_3, f_4).

26. On voit immédiatement que le plan osculateur au point $t=\alpha$ de la courbe

$$\frac{f_1}{t-\alpha} : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

a pour équation

$$\begin{vmatrix} y & z & w\\ \varphi_2(\alpha) & \varphi_3(\alpha) & \varphi_4(\alpha)\\ \varphi'_2(\alpha) & \varphi'_3(\alpha) & \varphi'_4(\alpha)\end{vmatrix}=0.$$

De même, les plans osculateurs au point double ($t=\alpha$, $t=\beta$) de la courbe

$$\frac{f_1}{(t-\alpha)(t-\beta)} : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

ont respectivement pour équations

$$\begin{vmatrix} y & z & w \\ \varphi_2(\alpha) & \varphi_3(\alpha) & \varphi_4(\alpha) \\ \varphi'_2(\alpha) & \varphi'_3(\alpha) & \varphi'_4(\alpha) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} y & z & w \\ \varphi_2(\beta) & \varphi_3(\beta) & \varphi_4(\beta) \\ \varphi'_2(\beta) & \varphi'_3(\beta) & \varphi'_4(\beta) \end{vmatrix} = 0.$$

Le plan osculateur au point de rebroussement $(t = \alpha)$ de la courbe

$$\frac{f_1}{(t-\alpha)^2} : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

a de même pour équation

$$\begin{vmatrix} y & z & w \\ \varphi_2(\alpha) & \varphi_3(\alpha) & \varphi_4(\alpha) \\ \varphi'_2(\alpha) & \varphi'_3(\alpha) & \varphi'_4(\alpha) \end{vmatrix} = 0.$$

Soient, par exemple, la quartique gauche (23)

$$\frac{a_1 t + b_1}{(t-\alpha)^2} : \frac{a_2}{t-\beta} : \frac{a_3}{t-\gamma} : \frac{a_4}{t-\delta}.$$

Le plan osculateur au point de rebroussement $(t = \alpha)$ a pour équation

$$\begin{vmatrix} y & z & w \\ \frac{1}{\alpha-\beta} & \frac{1}{\alpha-\gamma} & \frac{1}{\alpha-\delta} \\ \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} & \frac{1}{(\alpha-\gamma)^2} & \frac{1}{(\alpha-\delta)^2} \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien, en développant,

$$z(\alpha-\gamma)^2(\delta-\beta) + w(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma) + y(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta) = 0.$$

Si cette quartique passe en deux points donnés, α est un coefficient variable, et l'on voit que le plan osculateur au point de rebroussement enveloppe une cône quartique, dont la base sur le plan $x = 0$ est une conique circonscrite à la face du tétraèdre de référence située dans ce plan.

Le plan osculateur au point $t = \alpha$ de la courbe

$$f_1 : f_2 : (t-\alpha)^2 \varphi_3 : (t-\alpha)^2 \varphi_4$$

tangente à l'arête xy du tétraèdre de référence a pour équations

$$\begin{vmatrix} z & w \\ \varphi_3(\alpha) & \varphi_4(\alpha) \end{vmatrix} = 0.$$

Soit, par exemple (**24**), une quartique unicursale tangente à un quadrilatère gauche ayant mêmes sommets que le tétraèdre de référence

$$\begin{aligned} &a_1(t-\alpha)^2(t-\beta)^2 \\ &\quad : a_1(t-\beta)^2(t-\gamma)^2 : a_3(t-\gamma)^2(t-\delta)^2 : a_4(t-\delta)^2(t-\alpha)^2; \end{aligned}$$

les plans osculateurs de la courbe en ses points de contact avec les côtés du quadrilatère ont pour équations

$$\frac{x}{a_1(\alpha-\beta)^2} = \frac{y}{a_2(\beta-\gamma)^2}; \quad \frac{y}{a_2(\beta-\gamma)^2} = \frac{z}{a_3(\gamma-\delta)^2};$$
$$\frac{z}{a_3(\gamma-\delta)^2} = \frac{w}{a_4(\alpha-\delta)^2}; \quad \frac{w}{a_4(\alpha-\delta)^2} = \frac{x}{a_1(\alpha-\beta)^2};$$

ces quatre plans se coupent donc en un même point.

27. Si x, y, z et w sont les coordonnées d'un point donné de l'espace, l'équation

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 & f'_4 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 & f''_4 \end{vmatrix} = 0,$$

résolue par rapport à t, donnera les points de contact des plans osculateurs menés à la courbe par ce point. Il est facile de voir que, dans le cas d'une courbe unicursale d'ordre m, cette équation est d'ordre $3(m-2)$ en t.

Désignons en effet par Δf la fonction définie par l'équation suivante :

$$\Delta f = mf - tf;$$

la fonction dérivée Δf est d'ordre $m-1$ en t.

De même la fonction $\Delta^2 f$, définie par l'équation

$$\begin{aligned} \Delta^2 f = \Delta(\Delta f) &= (m-1)(mf-tf') - t(mf-tf')' \\ &= m(m-1)f - 2(m-1)tf' + t^2 f'', \end{aligned}$$

sera d'ordre $m-2$, et ainsi de suite.

Ceci posé, on reconnaît immédiatement qu'on a

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 & f'_4 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 & f''_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ \Delta^2 f_1 & \Delta^2 f_2 & \Delta^2 f_3 & \Delta^2 f_4 \\ \Delta f'_1 & \Delta f'_2 & \Delta f'_3 & \Delta f'_4 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 & f''_4 \end{vmatrix},$$

ce qui montre que l'équation (1) est d'ordre $3(m-2)$ en t. Telle est la classe d'une courbe gauche unicursale d'ordre m.

28. Quand une courbe gauche unicursale a un point de rebroussement, sa classe diminue de deux unités. Soient, en effet,

$$f_1 : t^2\varphi_2 : t^2\varphi_3 : t^2\varphi_4$$

les équations d'une courbe gauche ayant un point de rebroussement pour $t=0$, au point x. L'équation générale du plan osculateur est

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ f_1 & t^2\varphi_2 & t^2\varphi_3 & t^2\varphi_4 \\ f'_1 & (t^2\varphi_2)' & (t^2\varphi_3)' & (t^2\varphi_4)' \\ f''_1 & (t^2\varphi_2)'' & (t^2\varphi_3)'' & (t^2\varphi_4)'' \end{vmatrix} = 0.$$

Je dis que t^2 est facteur dans le premier membre de cette équation. Il suffit pour s'en assurer de vérifier que t^2 est facteur dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} y & z & w \\ (t^2\varphi_2)' & (t^2\varphi_3)' & (t^2\varphi_4)' \\ (t^2\varphi_2)'' & (t^2\varphi_3)'' & (t^2\varphi_4)'' \end{vmatrix}$$

ou simplement dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} (t^2\varphi_3)' & (t^2\varphi_4)' \\ (t^2\varphi_3)'' & (t^2\varphi_4)'' \end{vmatrix},$$

et on le reconnaît très simplement en développant les termes de ce déterminant.

On démontrerait de même que si une courbe gauche unicursale d'ordre m a un point multiple pour lequel p branches de la courbe ont la même tangente, la classe de la courbe est égale à

$$3(m-2)-2(p-1).$$

29. Un plan osculateur donné d'une courbe équivaut à deux conditions. On exprime en effet que le plan

$$lx + my + nz + pw = 0$$

oscule la courbe C, en écrivant les conditions pour que l'équation

$$lf_1 + mf_2 + nf_3 + pf_4 = 0$$

ait trois racines égales.

Autrement, les équations

$$(t - \alpha)^3 \varphi_1 : f_2 : f_3 : f_4$$

représentent évidemment une courbe ayant un contact du second ordre avec le plan $x = 0$, et l'on voit que ces équations renferment deux coefficients de moins que l'équation générale.

30. Cherchons, comme exemple, les équations d'une cubique gauche dont on donne six plans osculateurs, savoir les quatre faces du tétraèdre de référence et les deux plans

$$\begin{gathered} l\,x + m\,y + n\,z + p\,w = 0, \\ l_1 x + m_1 y + n_1 z + p_1 w = 0. \end{gathered}$$

Les équations de la courbe seront de la forme

$$a_1 (t - \alpha)^3 : a_2 (t - \beta)^3 : a_3 (t - \gamma)^3 : a_4 (t - \delta)^3,$$

et nous achèverons de les déterminer en exprimant que chacune des équations

$$\begin{gathered} l\,a_1(t - \alpha)^3 + m\,a_2(t - \beta)^3 + n\,a_3(t - \gamma)^3 + p\,a_4(t - \delta)^3 = 0, \\ l_1 a_1(t - \alpha)^3 + m_1 a_2(t - \beta)^3 + n_1 a_3(t - \gamma)^3 + p_1 a_4(t - \delta)^3 = 0 \end{gathered}$$

a trois racines égales.

Pour simplifier les calculs, nous supposerons, ce qui est permis, que la racine triple de la première équation doit être égale à o, et celle de la seconde à l'infini.

Nous aurons alors les relations

$$\begin{aligned}
l\, a_1\alpha + m\, a_2\beta + n\, a_3\gamma + p\, a_4\delta &= 0,\\
l\, a_1\alpha^2 + m\, a_2\beta^2 + n\, a_3\gamma^2 + p\, a_4\delta^2 &= 0,\\
l\, a_1\alpha^3 + m\, a_2\beta^3 + n\, a_3\gamma^3 + p\, a_4\delta^3 &= 0,\\
l_1 a_1 + m_1 a_2 + n_1 a_3 + p_1 a_4 &= 0,\\
l_1 a_1\alpha + m_1 a_2\beta + n_1 a_3\gamma + p_1 a_4\delta &= 0,\\
l_1 a_1\alpha^2 + m_1 a_2\beta^2 + n_1 a_3\gamma^2 + p_1 a_4\delta^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Des trois premières on tire

$$\begin{aligned}
\frac{la_1\alpha}{(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)(\delta-\beta)} &= -\frac{ma_2\beta}{(\gamma-\delta)(\delta-\alpha)(\alpha-\gamma)}\\
&= \frac{na_3\gamma}{(\delta-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-\delta)} = -\frac{pa_4\delta}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Les trois dernières donnent de même

$$\begin{aligned}
\frac{l_1 a_1}{(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)(\delta-\beta)} &= \frac{-m_1 a_2}{(\gamma-\delta)(\delta-\alpha)(\alpha-\gamma)}\\
&= \frac{n_1 a_3}{(\delta-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-\delta)} = \frac{-p_1 a_4}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{l\alpha}{l_1} = \frac{m\beta}{m_1} = \frac{n\gamma}{n_1} = \frac{p\delta}{p_1};$$

d'où

$$\alpha = \frac{l_1}{l},\quad \beta = \frac{m_1}{m},\quad \gamma - \frac{n_1}{n},\quad \delta = \frac{p_1}{p},$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)(\delta-\beta)}{l\alpha} = \frac{(m_1 n)(n_1 p)(p_1 m)}{l_1 m^2 n^2 p^2}\\
&= \frac{l^2}{l_1}(m_1 n)(n_1 p)(p_1 m)\,\frac{1}{l^2 m^2 n^2 p^2},
\end{aligned}$$

en posant $(m_1 n) = m_1 n - mn_1 \ldots$, avec des expressions analogues pour a_2, a_3, a_4; les équations de la courbe sont donc enfin

$$\begin{aligned}
&\frac{l_2}{l_1}(m_1 n)(n_1 p)(p_1 n)\left(t - \frac{l_1}{l}\right)^3\\
&\quad : -\frac{m_2}{m_1}(n_1 p)(p_1 l)(l_1 n)\left(t - \frac{m_1}{m}\right)^3\\
&\quad : \frac{n_2}{n_1}(p_1)(l_1 m)(n_1 p)\left(t - \frac{n_1}{n}\right)^3\\
&\quad : -\frac{p_2}{p_1}(l m_1)(m_1 n)(n_1 l)\left(t - \frac{p_1}{p}\right).
\end{aligned}$$

31. Cherchons encore les équations d'une cubique gauche osculatrice aux quatre faces du tétraèdre de référence et passant en deux points donnés (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) pour $t = \infty$ et $t = 0$, respectivement.

Les équations de la courbe seront de la forme

$$a_1(t-\alpha)^3 : a_2(t-\beta)^3 : a_3(t-\gamma)^3 : a_4(t-\delta)^3,$$

et l'on aura

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = x_1 : y_1 : z_1 : w_1;$$
$$a_1\alpha^3 : a_2\beta^3 : a_3\gamma^3 : a_4\delta^3 = x_2 : y_2 : z_2 : w_2;$$

les équations de la courbe sont donc

$$x_1\left(t-\sqrt[3]{\frac{x_2}{x_1}}\right)^3 : y_1\left(t-\sqrt[3]{\frac{y_2}{y_1}}\right)^3$$
$$: z_1\left(t-\sqrt[3]{\frac{z_2}{z_1}}\right)^3 : w_1\left(t-\sqrt[3]{\frac{w_2}{w_1}}\right).$$

Il y a 81 solutions, dont une seule est réelle.

32. Les équations d'une courbe gauche étant

$$f_1 : f_2 : f_3 : f_4,$$

nous avons vu que les équations

$$x : y : z = f_1 : f_2 : f_3 \tag{1}$$

sont celles de la courbe plane perspective de la courbe gauche sur le plan $w = 0$, l'œil étant placé au point w. Or, il est évident que les points de contact des plans osculateurs de la courbe gauche qui passent par l'œil se projettent suivant les points d'inflexion de la courbe plane; ces points sont donc déterminés par l'équation

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \end{vmatrix} = 0;$$

cette équation exprime ainsi que trois points infiniment voisins de la courbe gauche plane sont en ligne droite.

Dans le cas d'une courbe rationnelle d'ordre m, l'équation ci-dessus peut être remplacée par la suivante (27)

$$\begin{vmatrix} \Delta^2 f_1 & \Delta^2 f_2 & \Delta^2 f_3 \\ \Delta f'_1 & \Delta f'_2 & \Delta f'_3 \\ \Delta f''_1 & \Delta f''_2 & \Delta f''_3 \end{vmatrix} = 0;$$

elle est donc d'ordre $3(m-2)$; ainsi, une courbe plane unicursale d'ordre m a $3(m-2)$ points d'inflexion. Un point de rebroussement diminue ce nombre de deux unités, et, en général, un point multiple, dont p tangentes coïncident, le diminue de $2(p-1)$ unités.

V. — *Plans osculateurs stationnaires.*

33. La condition pour que quatre points consécutifs d'une courbe gauche soient dans un même plan s'obtient en substituant dans l'équation du plan osculateur, qui contient trois points consécutifs de la courbe, les coordonnées d'un quatrième point voisin, savoir

$$(f_1 + 3f'_1\,dt + 3f''_1\,dt^2 + f'''_1\,dt^3, \ldots),$$

ce qui donne

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f^4 \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 & f'_4 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 & f''_2 \\ f'''_1 & f'''_2 & f'''_3 & f'''_4 \end{vmatrix} = 0;$$

telle est l'équation qui détermine les points de contact des plans osculateurs stationnaires.

Si la courbe donnée est une courbe unicursale, l'équation ci-dessus peut être remplacée par la suivante (27) :

$$\begin{vmatrix} \Delta^3 f_1 & \Delta^3 f_2 & \Delta^3 f_3 & \Delta^3 f_4 \\ \Delta^2 f'_1 & \Delta^2 f'_2 & \Delta^2 f'_3 & \Delta_2 f'_4 \\ \Delta f''_1 & \Delta f''_2 & \Delta f''_3 & \Delta f''_4 \\ f'''_1 & f'''_2 & f'''_3 & f'''_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Donc elle est d'ordre $4(m-3)$ en t, et l'on voit qu'une courbe unicursale d'ordre m a, en général, $4(m-3)$ plans osculateurs stationnaires.

34. On démontre très simplement que si une courbe a un point de rebroussement, le nombre des plans stationnaires diminue de trois unités, de sorte que, si une courbe a k points de rebroussement, et si $R = 0$ est l'équation d'ordre k en t qui détermine ces points, l'équation qui donne les plans stationnaires prend la forme

$$R^3 \Delta = 0,$$

et alors l'équation

$$\Delta = 0$$

est une équation d'ordre $4(m-3) - 3k$ qui détermine les points de contact des plans stationnaires véritables.

De même, si une courbe gauche unicursale a un point multiple pour lequel p branches de courbes ont la même tangente, le nombre des plans stationnaires diminue de $3(p-1)$ unités.

Ainsi une quartique gauche a, en général, quatre plans osculateurs stationnaires; si elle a un point de rebroussement, elle n'a plus qu'un seul plan stationnaire. Une quintique gauche ayant deux points de rebroussement a deux plans stationnaires; une sextique gauche ayant quatre points de rebroussement est de la quatrième classe et elle n'a aucun plan stationnaire.

35. Un plan stationnaire donné d'une courbe gauche équivaut à trois conditions.

On obtient, en effet, la condition pour que le plan

$$lx + my + nz + pw = 0$$

soit un plan osculateur stationnaire d'une courbe donnée, en exprimant que l'équation

$$lf_1 + mf_2 + nf_3 + pf_4 = 0$$

a quatre racines égales, ce qui donne trois conditions. Autrement les équations

$$(t-\alpha)^4 \varphi_1 : f_2 : f_3 : f_4$$

représentent évidemment une courbe ayant pour plan osculateur stationnaire $x = 0$, et l'on voit qu'elles renferment trois coefficients de moins que les équations générales.

Par exemple, les équations

$$a_1(t-\alpha)^4 : a_2(t-\beta)^4 : a_3(t-\gamma)^4 : a_4(t-\delta)^4,$$

sont les équations générales d'une quartique gauche rapportée à ses plans osculateurs stationnaires supposés réels.

Soient (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) deux point donnés de la courbe correspondant aux valeurs $t = \infty$, et $t = 0$ de la variable, nous aurons

$$x_1 : y_1 : z_1 : w_1 = a_1 : a_2 : a_3 : a_4;$$
$$x_2 : y_2 : z_2 : w_2 = a_1 \alpha^4 : a_2 \beta^4 : a_3 \gamma^4 : a_4 \delta^4,$$

et les équations de la courbe sont

$$x_1 \left(t - \sqrt[4]{\frac{x_2}{x_1}}\right)^4 : y_1 \left(t - \sqrt[4]{\frac{y_2}{y_1}}\right)^4$$
$$: z_1 \left(t - \sqrt[4]{\frac{z_2}{z_1}}\right)^4 : w_1 \left(t - \sqrt[4]{\frac{w_2}{w_1}}\right)^4.$$

Il y a 128 solutions. Si les quatre quotients $\frac{x_2}{x_1}$, $\frac{y_2}{y_1}$, $\frac{z_2}{z_1}$, $\frac{w_2}{w_1}$ sont de même signe, 64 solutions sont réelles et 64 sont imaginaires. Dans le cas contraire, il n'y a aucune solution réelle.

Si, au lieu de donner deux points pour achever de déterminer la courbe, on donne deux plans osculateurs,

$$l\,x + m\,y + n\,z + p\,w = 0,$$
$$l_1 x + m_1 y + n_1 z + p_1 w = 0,$$

nous aurons à exprimer que chacune des équations

$$l\,a_1 (t - \alpha)^4 + m\,a_2 (t - \beta)^4 + n\,a_3 (t - \gamma)^4 + p\,a_4 (t - \delta)^4 = 0,$$
$$l_1 a_1 (t - \alpha)^4 + m_1 a_2 (t - \beta)^4 + n_1 a_3 (t - \gamma)^4 + p_1 a_4 (t - \delta)^4 = 0$$

a une racine triple.

Si, pour simplifier les calculs, nous supposons que ces racines soient zéro et l'infini, nous aurons

$$l\,a_1 \alpha^2 + m\,a_2 \beta^2 + n\,a_3 \gamma^2 + p\,a_4 \delta^2 = 0;$$
$$l\,a_1 \alpha^3 + m\,a_2 \beta^3 + n\,a_3 \gamma^3 + p\,a_4 \delta^3 = 0;$$
$$l\,a_1 \alpha^4 + m\,a_2 \beta^4 + n\,a_3 \gamma^4 + p\,a_4 \delta^4 = 0;$$
$$l_1 a_1 + m_1 a_2 + n_1 a_3 + p_1 a_4 = 0;$$
$$l_1 a_1 \alpha + m_1 a_2 \beta + n_1 a_3 \gamma + p_1 a_4 \delta = 0;$$
$$l_1 a_1 \alpha^2 + m_1 a_2 \beta^2 + n_1 a_3 \gamma^2 + p_1 a_4 \delta^2 = 0.$$

Les trois premières équations donnent

$$\frac{la_1\alpha^2}{(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)(\delta-\beta)}=\frac{-ma_2\beta^2}{(\gamma-\delta)(\delta-\alpha)(\alpha-\gamma)}$$
$$=\frac{na_3\gamma^2}{(\delta-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-\delta)}=\frac{-pa_4\delta^2}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}.$$

Les trois dernières donnent de même

$$\frac{l_1a_1}{(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)(\delta-\beta)}=\frac{-m_1a_2}{(\gamma-\delta)(\delta-\alpha)(\alpha-\gamma)}$$
$$=\frac{n_1a_3}{(\delta-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-\delta)}=\frac{-p_1a_4}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}.$$

On déduit de là

$$\frac{l\alpha^2}{l_1}=\frac{m\beta^2}{m_1}=\frac{n\gamma^2}{n_1}=\frac{p\delta^2}{p_1},$$

d'où

$$\alpha=\sqrt{\frac{l_1}{l}},\quad \beta=\sqrt{\frac{m_1}{m}},\quad \gamma=\sqrt{\frac{n_1}{n}},\quad \delta=\sqrt{\frac{p_1}{p}},$$
$$a_1=\frac{(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)(\delta-\beta)}{l_1}=\frac{l}{l_1}\,\frac{(\sqrt{m_1n})(\sqrt{n_1p})(\sqrt{p_1m})}{lmnp},$$

en posant

$$\sqrt{m_1n}-\sqrt{mn_1}=(\sqrt{m_1n})\ldots$$

avec des valeurs analogues pour a_2, a_3, a_4. Les équations de la courbe sont donc

$$\frac{l}{l_1}(\sqrt{m_1n})(\sqrt{n_1p})(\sqrt{p_1m})\left(t-\sqrt{\frac{l_1}{l}}\right)^4$$
$$:\frac{m_1}{m_1}(\sqrt{p_1n})(\sqrt{l_1p})(\sqrt{n_1l})\left(t-\frac{m_1}{m}\right)^4$$
$$:\frac{n}{n_1}\sqrt{p_1l})(\sqrt{l_1m})(\sqrt{m_1p})\left(t-\sqrt{\frac{n_1}{n}}\right)^4$$
$$:\frac{p}{p_1}(\sqrt{l_1n})(\sqrt{n_1m})(\sqrt{m_1l})\left(t-\frac{p_1}{p}\right)^4.$$

VI. — *Points d'inflexion linéaire et tangentes singulières.*

36. Cherchons maintenant les conditions pour qu'il existe sur une courbe gauche un point d'inflexion linéaire, c'est-à-dire un point tel que les deux points infiniment voisins de la courbe soient situés avec lui sur une même ligne droite.

Les conditions qui expriment que trois points de la courbe sont en ligne droite peuvent se mettre sous la forme

$$\left\| \begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 & f'_4 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 & f''_4 \end{matrix} \right\| = 0,$$

le premier membre de cette équation représentant le système de déterminants qu'on obtient en omettant successivement une colonne. On a ainsi deux équations distinctes entre lesquelles on éliminera t pour obtenir la condition cherchée.

37. Les équations du paragraphe précédent expriment qu'en un point d'inflexion linéaire, le plan osculateur est indéterminé. Si donc il existe sur une courbe un point d'inflexion linéaire, α, l'équation générale du plan osculateur est divisible par $t-\alpha$, et par suite, elle n'est plus que du degré $3(m-1)-1$ en t. Ainsi l'existence d'un point d'inflexion linéaire diminue d'une unité la classe de la courbe. Une quartique gauche ayant un point d'inflexion linéaire est de la cinquième classe; elle est de la quatrième classe seulement si elle a deux points d'inflexion.

Les équations

$$(t-\alpha)^3\varphi_1 : (t-\alpha)^3\varphi_2 : f_3 : f_4$$

représentent évidemment une courbe ayant un point d'inflexion linéaire pour $t=\alpha$; la tangente d'inflexion est l'arête zw du tétraèdre de référence. Il résulte de là qu'une tangente d'inflexion linéaire donnée d'une courbe gauche équivaut à cinq conditions; si le point de contact est donné, la tangente d'inflexion équivaut à six conditions.

38. Un plan mené par une tangente d'inflexion d'une courbe gauche et un point infiniment voisin est un plan stationnaire, puisqu'il contient quatre points infiniment voisins de la courbe. Je dis qu'un tel plan compte pour deux dans le nombre des plans stationnaires de la courbe gauche.

Soient en effet

$$t^3\varphi_1 : t^3\varphi_2 : f_3 : f_4$$

les équations d'une courbe gauche ayant un point d'inflexion pour $t = 0$. Les plans stationnaires sont donnés par l'équation

$$\begin{vmatrix} t^3\varphi_1 & t^3\varphi_2 & f_3 & f_4 \\ (t^3\varphi_1)' & (t^3\varphi_2)' & f'_3 & f'_4 \\ (t^3\varphi_1)'' & (t^3\varphi_2)'' & f''_3 & f''_4 \\ (t^3\varphi_1)''' & (t^3\varphi_2)''' & f'''_3 & f'''_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour reconnaître que t^2 est facteur dans le premier membre de cette équation, il suffit de vérifier qu'il est facteur dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} (t^3\varphi_1)'' & (t^3\varphi_2)'' \\ (t^3\varphi_1)''' & (t^3\varphi_2)''' \end{vmatrix},$$

ce qui ne présente aucune difficulté.

Ainsi, une quartique gauche ayant deux points d'inflexion linéaire n'a pas d'autre plan stationnaire que les plans osculateurs en ces deux points.

39. Plus généralement, les équations

$$(t-\alpha)^n\varphi_1 : (t-\alpha)^n\varphi_2 : f_3 : f_4$$

représentent une courbe unicursale ayant un contact d'ordre $n-1$, pour $t = \alpha$, avec l'arête zw du tétraèdre de référence; la classe de cette courbe est égale à $3(m-2) - (n-2)$, et le nombre de ses plans osculateurs stationnaires est égal à

$$4(m-3) - 2(n-2).$$

En outre de ces plans, il existe un plan ayant avec la courbe un contact d'ordre n au point $t = \alpha$; l'équation de ce plan est

$$\frac{x}{\varphi_1(\alpha)} = \frac{y}{\varphi_2(\alpha)};$$

il compte pour $2(n-2)$ plans stationnaires ordinaires.

40. Par exemple, les équations

$$(t-\alpha)^n(t-\beta)^n$$
$$: (t-\beta)^n(t-\gamma)^n : (t-\gamma)^n(t-\delta)^n : (t-\delta)^n(t-\alpha)^n$$

représentent une courbe gauche d'ordre $2n$, ayant un contact d'ordre $n - 1$ avec les côtés du quadrilatère gauche $xyzw$. Les points de contact ont respectivement pour coordonnées

$$\begin{array}{cccc} 0 & (\alpha-\beta)^n & (\alpha-\delta)^n & 0 \\ 0 & 0 & (\beta-\gamma)^n & (\beta-\alpha)^n \\ (\gamma-\beta)^n & 0 & 0 & (\gamma-\delta)^n \\ (\delta-\alpha)^n & (\delta-\gamma)^n & 0 & 0 \end{array}$$

et l'on a

$$\begin{vmatrix} 0 & (\alpha-\beta)^n & (\alpha-\delta)^n & 0 \\ 0 & 0 & (\beta-\gamma)^n & (\beta-\alpha)^n \\ (\gamma-\beta)^n & 0 & 0 & (\gamma-\delta)^n \\ (\delta-\alpha)^n & (\delta-\gamma)^n & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Donc ces quatre points sont situés dans un même plan.

Les plans osculateurs de la courbe en ces points ont respectivement pour équations

$$\frac{x}{(\alpha-\beta)^n} = \frac{w}{(\alpha-\delta)^n},$$

$$\frac{y}{(\beta-\gamma)^n} = \frac{x}{(\beta-\alpha)^n},$$

$$\frac{y}{(\gamma-\beta)^n} = \frac{z}{(\gamma-\delta)^n},$$

$$\frac{z}{(\gamma-\delta)^n} = \frac{w}{(\delta-\alpha)^n};$$

et l'on voit qu'ils se coupent en un même point ayant pour coordonnées

$$(\alpha-\beta)^n, \quad (\gamma-\beta)^n, \quad (\gamma-\delta)^n, \quad (\alpha-\delta)^n.$$

Les résultats obtenus précédemment (24) et (26) pour la quartique gauche sont des cas particuliers des théorèmes qui précèdent.

VII. — *Plans surosculateurs.*

41. On obtient d'une manière générale les conditions pour que le plan

$$lx + my + nz + pw = 0,$$

ait, avec la courbe gauche unicursale C, un contact d'ordre $n - 1$, en exprimant que l'équation

$$lf_1 + mf_2 + nf_3 + pf_4 = 0$$

a n racines égales, ce qui donnera $n - 1$ conditions.

Il est évident que les équations

$$(t-\alpha)^n \varphi_1 : f_2 : f_3 : f_4$$

représentent une courbe ayant avec le plan $x = 0$ un contact d'ordre $n - 1$ pour $t = \alpha$; et l'on voit qu'un plan donné ayant avec la courbe un contact d'ordre $n - 1$ équivaut à $n - 1$ conditions.

Par exemple, les équations

$$a_1(t-\alpha)^m : a_2(t-\beta)^m : a_3(t-\gamma)^m : a_4(t-\delta)^m$$

représentent une courbe unicursale d'ordre m ayant avec chacune des faces du tétraèdre de référence un contact d'ordre $m - 1$.

Les points de contact ont pour coordonnées

$$\begin{array}{cccc}
0 & a_2(\alpha-\beta)^m & a_3(\alpha-\gamma)^m & a_4(\alpha-\delta)^m \\
a_1(\beta-\alpha)^m & 0 & a_3(\beta-\gamma)^m & a_4(\beta-\delta)^m \\
a_1(\gamma-\alpha)^m & a_2(\gamma-\beta)^m & 0 & a_4(\gamma-\delta)^m \\
a_1(\delta-\alpha)^m & a_2(\delta-\beta)^m & a_3(\delta-\gamma)^m & 0
\end{array}$$

Si m est un nombre impair, on a

$$\begin{vmatrix}
0 & a_3(\beta-\gamma)^m & a_4(\beta-\delta)^m \\
a_2(\gamma-\beta) & 0 & a_4(\gamma-\delta)^m \\
a_2(\delta-\beta) & a_3(\delta-\gamma)^m & 0
\end{vmatrix} = 0,$$

ce qui montre que les points de contact de trois des faces du tétraèdre sont dans un même plan avec le sommet correspondant. Comme cas particulier, les points de contact de trois plans osculateurs d'une cubique gauche sont dans un même plan avec leur point d'intersection.

42. Deux points donnés, (x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) de la courbe suffisent pour la déterminer complètement. On peut supposer en effet que ces points correspondent aux valeurs $t = \infty$ et

$t = 0$ de la variable, et les équations de la courbe sont

$$x_1\left(t - \sqrt[m]{\frac{x_2}{x_1}}\right)^m : y_1\left(t - \sqrt[m]{\frac{y_2}{y_1}}\right)^m$$
$$: z_1\left(t - \sqrt[m]{\frac{z_2}{z_1}}\right)^m : w_1\left(t - \sqrt[m]{\frac{w_2}{w_1}}\right)^m.$$

43. Le plan osculateur de la courbe a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ a_1(t-\alpha)^m & a_2(t-\beta)^m & a_3(t-\gamma)^m & a_4(t-\delta)^m \\ a_1(t-\alpha)^{m-1} & a_2(t-\beta)^{m-1} & a_3(t-\gamma)^{m-1} & a_4(t-\delta)^{m-1} \\ a_1(t-\alpha)^{m-2} & a_2(t-\beta)^{m-2} & a_3(t-\gamma)^{m-2} & a_4(t-\delta)^{m-2} \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien, en développant le premier membre,

$$\frac{x(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)(\delta-\beta)}{a_1(t-\alpha)^{m-2}} + y\,\frac{(\gamma-\delta)(\delta-\alpha)(\alpha-\gamma)}{a_2(t-\beta)^{m-2}}$$
$$+ z\,\frac{(\delta-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-\delta)}{a_3(t-\gamma)^{m-2}} + w\,\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{a_4(t-\delta)^{m-2}} = 0,$$

équation du degré $3(m-2)$, ainsi que cela doit être.

Les plans osculateurs stationnaires de la courbe sont donnés par l'équation

$$\begin{vmatrix} (t-\alpha)^m & (t-\beta)^m & (t-\gamma)^m & (t-\delta)^m \\ (t-\alpha)^{m-1} & (t-\beta)^{m-1} & (t-\gamma)^{m-1} & (t-\delta)^{m-1} \\ (t-\alpha)^{m-2} & (t-\beta)^{m-2} & (t-\gamma)^{m-2} & (t-\delta)^{m-2} \\ (t-\alpha)^{m-3} & (t-\beta)^{m-3} & (t-\gamma)^{m-3} & (t-\delta)^{m-3} \end{vmatrix} = 0,$$

qui, développée, devient simplement

$$(t-\alpha)^{m-3}(t-\beta)^{m-3}(t-\gamma)^{m-3}(t-\delta)^{m-3} = 0;$$

la courbe n'a donc pas d'autre plan stationnaire que ses plans surosculateurs. L'on voit en outre, et il est facile de démontrer directement; qu'un plan surosculateur ayant avec la courbe un contact d'ordre $m-1$ tient la place de $m-3$ plans stationnaires.

VIII. — *Développable osculatrice.*

44. Si, dans les équations générales de la tangente

$$f_1 + uf'_1 : f_2 + uf'_2 : f_3 + uf'_3 : f_4 + uf'_4,$$

on regarde t et u comme des variables indépendantes, ces équations représenteront la développable osculatrice de la courbe gauche C.

Nous obtiendrons la section de cette surface par le plan $w = 0$, en faisant $u = -\frac{f_4}{f'_4}$, ce qui donne

$$x : y : z = (f_1 f'_4) : (f_2 f'_4) : (f_3 f'_4).$$

Chacun des déterminants qui entrent dans cette équation est d'ordre $2(m-1)$ en t; donc la section plane de la développable osculatrice et par suite la développable elle-même sont d'ordre $2(m-1)$ (22).

La classe de la développable est égale à celle de la courbe elle-même, c'est-à-dire, en général, à $3(m-2)$.

Un point de rebroussement diminue d'une unité l'ordre de la développable, et de deux unités sa classe.

Un point multiple tel que p branches de courbe qui s'y croisent ont la même tangente diminue l'ordre de la développable osculatrice de $p-1$ unités et sa classe de $2(p-1)$.

Aussi, la développable osculatrice d'une cubique gauche est du quatrième ordre et de la troisième classe; celle d'une quartique unicursale générale est du sixième ordre et de la sixième classe; celle d'une quartique ayant un point de rebroussement est du cinquième ordre et de la quatrième classe; celle d'une quintique ayant deux points de rebroussement est du sixième ordre et de la sixième classe, etc.

45. La section plane de la développable osculatrice étant une courbe unicursale d'ordre $2m-2$, elle a en général

$$\frac{(2m-3)(2m-4)}{2} = 2m^2 - 7m + 6$$

points doubles ou points de rebroussement. Or il est facile de voir que les points de la courbe gauche situés dans le plan de la section sont des points de rebroussement de cette section. Soient, par exemple,

$$f_1 : t\varphi_2 : t\varphi_3 : t\varphi_4$$

les équations d'une courbe gauche qui passe par le sommet x du tétraèdre de référence, pour $t = 0$. Les équations de la section de la développable osculatrice par le plan $w = 0$ étant, en général,

$$(f_1 f'_4) : (f_2 f'_4) : (f_3 f'_4),$$

on reconnaîtra sans peine que les deux déterminants contiennent t^2 en facteur.

Donc une section plane de la développable osculatrice a en général

$$2m^2 - 8m + 6 = 2(m-1)(m-3)$$

points doubles autres que ses points de rencontre avec son arête de rebroussement. Il existe donc sur la développable une courbe double d'ordre $2(m-1)(m-3)$.

Ainsi la développable osculatrice d'une cubique gauche n'a pas de courbe double; celle d'une quartique gauche unicursale a une courbe double du sixième ordre, etc.

46. Si la courbe gauche a k points de rebroussement, l'ordre de sa développable osculatrice est égal à

$$2m - 2 - k,$$

et l'ordre de sa courbe double est égal à

$$\frac{(2m-k-3)(2m-k-4)}{2} - m$$
$$= 2(m-1)(m-3) - \frac{k(4m-k-7)}{2}.$$

Un point de rebroussement diminue donc de $2m-4$ unités l'ordre de la courbe double de la développable osculatrice d'une courbe gauche unicursale; deux points de rebroussement diminuent cet ordre de $4m-9$ unités, etc. Ainsi la développable osculatrice d'une quintique gauche ayant un point de rebroussement a une conique double; la courbe double de la développable osculatrice d'une quintique gauche ayant deux points de rebroussement est du cinquième ordre; celle relative à une sextique gauche ayant quatre points de rebroussement est du quatrième ordre, etc.

47. Une tangente d'inflexion linéaire d'une courbe gauche est une arête de rebroussement de la développable osculatrice.

En effet, les équations de la courbe étant

$$t^3\varphi_1 : t_3\varphi_2 : f_3 : f_4,$$

celles de la développable osculatrice sont

$$t^3\varphi_1 + u(t^3\varphi_1)' : t^3\varphi_2 + u(t^3\varphi_2)' : f_3 + uf'_3 : f_4 + uf'_4,$$

et la section par le plan quelconque $w = 0$ a des équations de la forme

$$t^2\Psi_1 : t^2\Psi_2 : \Psi_3.$$

Il en résulte qu'un point d'inflexion linéaire diminue d'une unité l'ordre de la courbe double de la développable osculatrice. Par exemple, la développable osculatrice d'une quartique gauche ayant deux points d'inflexion linéaire a une courbe double du quatrième ordre. Une section plane de cette surface a quatre points doubles et six points stationnaires.

IX. — *Nombre maximum des points doubles d'une courbe gauche.*

48. Nous avons vu qu'une courbe unicursale d'ordre m a $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles apparents dont plusieurs peuvent devenir des points doubles effectifs ou des points de rebroussement. Nous allons chercher quel est le nombre maximum des points doubles effectifs d'une courbe unicursale d'ordre m (¹).

(¹) *Note de la Rédaction.* — Il est évident que ce maximum aura lieu, lorsque le nombre des points doubles apparents atteindra son minimum. Or, M. Halphen a établi (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, p. 381) que ce dernier est égal, pour une courbe gauche quelconque, au plus grand

Une telle courbe peut toujours être considérée comme l'intersection partielle de deux surfaces algébriques, d'ordre μ et ν respectivement. Ces deux surfaces se coupent en outre suivant une courbe C′ d'ordre m', et l'on a

$$m + m' = \mu\nu. \tag{1}$$

Si, d'ailleurs, on désigne par h et h' les nombres des points doubles appparents des courbes C et C′ respectivement, on a (Salmon, *Geometry of three dimensions*, seconde édition, p. 273)

$$h = h' + \frac{(m - m')(\mu - 1)(\nu - 1)}{2}.$$

Le maximum du nombre des points doubles effectifs de la courbe B correspond évidemment au minimum de h. Or on a, en remplaçant ν par sa valeur tirée de l'équation (1),

$$h = h' + \frac{(m - m')(\mu - 1)\left(\frac{m + m'}{\mu} - 1\right)}{2}.$$

Cherchons le minimum du produit

$$(\mu - 1)\left(\frac{m + m'}{\mu} - 1\right) \tag{2}$$

pour une valeur connue de m'. Si l'on prend la dérivée de ce produit par rapport à μ, et qu'on l'égale à zéro, il vient

$$\frac{m + m'}{\mu} - 1 - (\mu - 1)\frac{m + m'}{\mu^2} = 0,$$

ou

$$\mu^2 = m + m'$$

et

$$\mu = \pm\sqrt{m + m'}.$$

---

entier contenu dans $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$. *Voir* également, à ce sujet, notre *Mémoire sur les courbes gauches algébriques* (*Bulletin*, t. I, p. 269.) Il suit de là que le nombre cherché est égal au plus grand entier contenu dans

$$\frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \frac{1}{4}(m-1)^2 + \frac{1}{4}.$$

H. P.

Il est facile de voir que la valeur négative de μ correspond à un minimum, et la valeur positive à un maximum. Et comme μ est nécessairement un nombre entier positif, on voit qu'on obtiendra le minimum de l'expression (2) et, par suite, celui de h, en faisant $\mu = 2$. (Nous excluons le cas de $\mu = 0$, qui ne signifie rien, et celui de $\mu = 1$, qui est relatif aux courbes planes.)

Donc le nombre minimum des points doubles apparents d'une courbe gauche unicursale et, par suite, le nombre maximum de ses points doubles effectifs correspondent au cas où la courbe est tracée sur une quadrique.

Or, si une courbe gauche d'ordre m tracée sur une quadrique rencontre en p points les génératrices de cette surface et en q points ses directrices, le nombre des points apparents de cette courbe a pour expression (Chasles)

$$h = \frac{p(p-1)+2(q-1)}{2},$$

avec la relation

$$p+q=m.$$

Si m est un nombre pair, le minimum de h s'obtient en faisant $p = q = \frac{m}{2}$, et il est égal à

$$\mathrm{H} = \frac{m(m-2)}{4}.$$

Si m est impair, le minimum a lieu pour

$$p = \frac{m+1}{2}, \quad q = \frac{m-1}{2},$$

et il a pour expression

$$\mathrm{H}_1 = \frac{(m-1)^2}{4}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} - \frac{m(m-2)}{4} = \frac{(m-2)^2}{4},$$

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} - \frac{(m-1)^2}{4} = \frac{(m-1)(m-3)}{4}.$$

Donc, enfin, le nombre maximum des points doubles effectifs d'une courbe gauche unicursale d'ordre m a pour expression

$$\delta = \frac{(m-2)^2}{4}$$

lorsque m est un nombre pair, et

$$\delta_1 = \frac{(m-1)(m-3)}{4}$$

lorsque m est un nombre impair.

Ainsi une quartique gauche a, au plus, un point double, une quintique gauche deux, une sextique gauche quatre, et ainsi de suite.

L'équation (1) montre que, si m est pair, on pourra prendre pour m' un nombre pair quelconque pour obtenir une courbe ayant le plus grand nombre possible de points doubles effectifs; de même, si m est un nombre impair, on pourra prendre pour m' un nombre impair quelconque. La quantité h' a pour minimum dans le premier cas

$$\frac{m'(m'-2)}{4},$$

et dans le second cas

$$\frac{(m'-1)^2}{4}.$$

X. — *Divisions homographiques tracées sur une courbe gauche unicursale.*

49. Soient

$$f_1(t) : f_2(t) : f_3(t) : f_4(t),$$
$$\varphi_1(\tau) : \varphi_2(\tau) : \varphi_3(\tau) : \varphi_4(\tau)$$

les équations de deux courbes gauches unicursales, d'ordres m et m' respectivement. Les équations de la droite qui joint deux points t et τ de ces courbes sont

$$(1)\quad f_1(t)+u\,\varphi_1(\tau) : f_2(t)+u\,\varphi_2(\tau) : f_3(t)+u\,\varphi_3(\tau) : f_4(t)+u\,\varphi_4(\tau).$$

Si l'on établit entre t et τ une relation quelconque, les équations (1) représenteront une surface gauche qui contient les deux courbes données.

Si la relation entre t et τ est de la forme

$$(2) \qquad t\tau + At + B\tau + C = 0,$$

à un point de la première courbe correspondra un seul point de la seconde et réciproquement. Nous dirons alors que les points t et τ forment sur les deux courbes des divisions homographiques.

Dans ce cas, les équations (1) représentent une surface réglée d'ordre $m + m'$.

On obtient en effet les équations de la section de cette surface par le plan $w = 0$ en faisant

$$u = -\frac{f_4(t)}{\varphi_4(\tau)},$$

ce qui donne

$$x : y : z = f_1(t)\varphi_4(\tau) - f_4(t)\varphi_1(\tau) : \ldots,$$

et si l'on remplace τ par sa valeur en fonction de t tirée de l'équation (2), les équations ci-dessus seront d'ordre $m + m'$ en t.

Ainsi la droite qui joint les points correspondants de deux divisions homographiques formées sur deux droites quelconques engendre une quadrique.

Si les divisions sont faites sur une droite et sur une conique, la surface réglée est du troisième ordre, etc.

50. Le plan tangent de la surface gauche en un point t de la première courbe a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) & f_4(t) \\ f'_1(t) & f'_2(t) & f'_3(t) & f'_4(t) \\ \varphi_1(\tau) & \varphi_2(\tau) & \varphi_3(\tau) & \varphi_4(\tau) \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est évidemment d'ordre $2m + m' - 2$ en t; donc le plan tangent en question enveloppe une surface développable de la classe $2m + m' - 2$.

De même les plans tangents de la surface gauche aux différents points de la seconde courbe enveloppent une surface développable de la classe $2m' + m - 2$.

51. Soient maintenant deux points t et τ d'une même courbe gauche C liés entre eux par la relation d'homographie

$$t\tau + At + B\tau + C = 0;$$

nous dirons que ces points forment sur la courbe deux divisions homographiques.

Quand on a ainsi, sur une même courbe, deux systèmes de points homographiques, il existe deux points doubles, c'est-à-dire deux points tels que chacun d'eux, considéré comme appartenant à l'un des systèmes, coïncide avec son homologue dans l'autre.

Si l'on fait, en effet, dans l'équation (1), $t = \tau$, il vient

$$t^2 + (A + B)b + C = 0,$$

équation du second degré, dont chaque racine fournit un point double.

52. La droite qui joint les points correspondants de deux divisions homographiques formées sur une même courbe unicursale d'ordre m engendre une surface gauche Σ dont l'ordre est égal à $2(m-1)$.

En effet, cette surface a pour équations

$$f_1(t) + uf_1(\tau) : f_2(t) + uf_2(\tau) : \ldots .$$

Ses points d'intersection avec la droite

$$a_1\theta + b_1 : a_2\theta + b_2 : a_3\theta + b_3 : a_4\theta + b_4$$

sont donnés par l'équation

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) & f_4(t) \\ f_1(\tau) & f_2(\tau) & f_3(\tau) & f_4(\tau) \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = 0,$$

dans laquelle les termes de l'ordre le plus élevé sont de la forme

$$A(t^m\tau^{m-1} - t^{m-1}\tau^m) = A(t-\tau)t^{m-1}\tau^{m-1}.$$

Mais le premier membre est divisible par $t - \tau$. Si l'on fait la division, le terme de l'ordre le plus élevé prend la forme $At^{m-1}\tau^{m-1}$. Si donc en remplace ensuite τ par sa valeur en fonction de t, tirée de l'équation d'homographie, on obtient une équation d'ordre $2(m-1)$ en t.

La surface Σ contient évidemment les tangentes à la courbe aux points doubles des divisions homographiques.

53. La courbe C est évidemment une courbe double de la surface gauche Σ; en chaque point a de cette courbe, la surface a deux plans tangents qui ont respectivement pour équations

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) & f_4(a) \\ f'_1(a) & f'_2(a) & f'_3(a) & f'_4(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) & f_4(b) \end{vmatrix} = 0,$$

et

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) & f_4(a) \\ f'_1(a) & f'_2(a) & f'_3(a) & f'_4(a) \\ f_1(c) & f_2(c) & f_3(c) & f_4(c) \end{vmatrix} = 0,$$

b et c étant les homologues du point a considéré comme appartenant successivement au premier et au second système des divisions homographiques.

Aux points doubles des divisions homographiques, ces deux plans se confondent en un seul; donc, les points en question sont des points de rebroussement de la surface gauche, les plans tangents de rebroussement sont les plans osculateurs de la courbe.

54. Si deux divisions homographiques formées sur une courbe sont telles que deux points homologues t et τ sont réciproques, on dit que les divisions sont en involution. L'équation d'homographie est alors

$$t\tau + A(t+\tau) + B = 0;$$

elle ne contient que deux coefficients arbitraires, de sorte que deux groupes de points conjugués, par exemple les deux points doubles, suffisent pour définir une involution.

La droite qui joint deux points homologues d'une involution formée sur une courbe gauche unicursale d'ordre m est une surface gauche Σ d'ordre $m-1$.

On verrait en effet, comme précédemment, que les points d'intersection de la surface avec une droite quelconque sont donnés par une équation du degré $2(m-1)$ en t; mais, si t est une racine de cette équation, le point homologue τ en sera évidemment une autre, et il est clair que ce couple de racines ne donnera qu'une génératrice de Σ, et, par suite, qu'un seul point d'intersection avec la droite considérée. On n'a donc que $m-1$ points d'intersection en tout, et tel est par suite l'ordre de Σ.

Ainsi, la droite qui joint les points homologues d'une involution sur une cubique gauche engendre une quadrique. Une seconde division en involution déterminera une seconde quadrique; mais on reconnaît sans peine que deux divisions en involution sur une même courbe ont un couple de points homologues communs; donc les deux quadriques ont une droite commune.

Deux involutions formées sur une quartique unicursale déterminent de même deux surfaces réglées du troisième ordre ayant une droite commune. L'intersection de ces deux surfaces, qui est du neuvième ordre, comprend donc cette droite, la courbe donnée et une seconde quartique.

La surface gauche Σ contient évidemment les tangentes de la courbe C aux points doubles de l'involution; ses plans tangents en ces deux points sont les plans osculateurs de la courbe.

55. Les plans tangents de la surface Σ aux différents points de la courbe C enveloppent une surface développable Δ dont je vais calculer la classe.

L'un de ces plans tangents a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) & f_4(t) \\ f'_1(t) & f'_2(t) & f'_3(t) & f'_4(t) \\ f_1(\tau) & f_2(\tau) & f_3(\tau) & f_4(\tau) \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est d'ordre $2(m-1)$ en t et d'ordre m en τ; mais on reconnaît sans peine que son premier membre est divisible par $(t-\tau)^2$. Si donc on supprime ce facteur et qu'on remplace τ par sa valeur en fonction de t, on obtiendra une équation d'ordre $3(m-2)$ en t; donc l'ordre de la développable Δ est égal à $3(m-2)$.

56. Si une courbe gauche a un point double et que les valeurs t_1 et t_2 de la variable qui correspondent à ce point soient un groupe d'une involution formée sur la courbe, la surface gauche engendrée par les droites qui joignent deux points homologues de l'involution est d'ordre $m-2$. En effet, dans ce cas, l'équation d'ordre $2(m-1)$ en t, qui détermine les génératrices de la surface gauche situées dans un même plan avec une droite donnée est évidemment satisfaite pour $t=t_1$ et $t=t_2$; en supprimant de cette équation les facteurs $t-t_1$, $t-t_2$, son degré devient égal à $2(m-2)$, ce qui montre que l'ordre de la surface gauche est égal à $m-2$.

Si, par exemple, on a sur une quartique gauche à point double un système de points en involution, dont le point double forme un groupe, la droite qui joint deux points homologues de l'involution engendre une quadrique.

Il en est de même évidemment si le point double est remplacé par un point de rebroussement qui soit un point double de l'involution considérée.

La présence de deux points doubles parmi les groupes d'une involution formée sur une courbe réduira de même à $m-3$ le degré de la surface gauche engendrée par la droite qui réunit deux points correspondants de l'involution. Ainsi, dans le cas d'une involution déterminée sur une quintique gauche ayant deux points doubles, par ces points doubles eux-mêmes, la surface engendrée est une quadrique.

57. Cherchons enfin l'ordre de la surface gauche Σ engendrée par une droite qui rencontre en trois points une courbe gauche unicursale d'ordre m.

Soient t et τ deux des points de rencontre de la droite mobile, dans l'une de ses positions, avec la courbe donnée. Les points de rencontre de la surface Σ avec une droite quelconque

$$a_1\theta+b_1 : a_2\theta+b_2 : a_3\theta+b_3 : a_4\theta+b_4$$

seront donnés par l'équation

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) & f_4(t) \\ f_1(\tau) & f_2(\tau) & f_3(\tau) & f_4(\tau) \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Mais, t étant un point donné de la courbe, le cône qui a son sommet en ce point et s'appuie sur la courbe est d'ordre $m-1$, et il a

$$\frac{(m-2)(m-3)}{2}$$

arêtes doubles. Chacune de ces droites rencontre la courbe en deux points τ; donc l'équation qui lie les valeurs t et τ de la variable qui entrent dans l'équation (1) est d'ordre $(m-2)(m-3)$ par rapport à τ, et, comme elle est évidemment symétrique par rapport à t et τ, elle est de la forme

$$(2) \qquad A(t-\tau)^{(m-2)(m-3)}+\ldots=0,$$

les termes négligés étant d'ordre inférieur au premier.

Mais l'équation (1) est elle-même symétrique en t et τ et de la forme

$$(3) \qquad A'(t-\tau)^{m-1}+\ldots=0.$$

Il est facile maintenant de trouver le degré de l'équation en t résultant de l'élimination de τ entre les équations (2) et (3).

Considérons en effet dans ces équations t et τ comme des coordonnées cartésiennes. L'équation (2) représentera alors une courbe plane d'ordre $2(m-2)(m-3)$ ayant un point multiple d'ordre $(m-2)(m-3)$ à l'infini, dans la direction de chacun des axes.

De même l'équation (3) représentera une courbe d'ordre $2(m-1)$ ayant des points multiples d'ordre $m-1$ à l'infini sur les axes.

Ces courbes ont

$$4(m-1)(m-2)(m-3)$$

points communs.

Mais de ce nombre il y a lieu de retrancher les points à l'infini, qui représentent

$$2(m-1)(m-2)(m-3)$$

points de rencontre ordinaires; il reste donc seulement

$$2(m-1)(m-2)(m-3)$$

points de rencontre à distance finie.

Remarquons en outre que, les deux courbes étant symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle positif des axes, à un point de rencontre (t, τ) en correspond un autre (τ, t); il n'y a donc en réalité que $(m-1)(m-2)(m-3)$ points de rencontre donnant des génératrices distinctes de la surface gauche. Comme d'ailleurs chaque génératrice rencontre la courbe en trois points, on n'obtient en réalité que

$$\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{3}$$

points de rencontre de la droite considérée avec la surface gauche Σ. Tel est, par suite, l'ordre de cette surface ([1]). Par exemple, une corde qui s'appuie en trois points d'une quartique gauche unicursale décrit une quadrique; les cordes triples d'une quintique gauche unicursale générale engendrent une surface gauche du huitième ordre, ayant la quintique pour courbe triple.

58. Si une courbe unicursale d'ordre m a un point double, le cône d'ordre $m-2$, qui a son sommet en ce point et s'appuie sur la courbe, fait évidemment partie du lieu des cordes triples; donc l'ordre de la surface gauche Σ est diminué de $m-2$ pour chaque point double. Ainsi, pour une quartique gauche à point double, Σ est d'ordre zéro, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'autres cordes triples que celles qui passent au point double. Pour une quartique gauche ayant deux points doubles, Σ est une quadrique; pour une sextique

---

([1]) *Note de la Rédaction.* — Plus généralement, on sait que le degré de la surface, lieu des sécantes triples d'une courbe gauche du degré m, à h points doubles apparents, est égal à

$$(m-2)\left[h-\frac{1}{6}m(m-1)\right],$$

l'ordre de multiplicité de la courbe étant d'ailleurs $h-m+2$.

Pour $h=\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, on a résolu le problème posé par l'auteur. On peut aussi, si l'on veut, chercher le nombre des sécantes quadruples d'une courbe gauche unicursale du degré m. Il est égal, en général, à

$$\frac{1}{2}h(h-4m+11)-\frac{1}{24}m(m-2)(m-3)(m-13).$$

Pour $h=\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, on trouve

$$\frac{1}{12}(m-2)(m-3)^2(m-4).$$

H. P.

gauche ayant quatre points doubles, Σ est une surface gauche du quatrième ordre, etc.

Dans un prochain Mémoire, nous étudierons les propriétés des courbes gauches unicursales du quatrième et du cinquième ordre.