BULLETIN DE LA S. M. F.

WORMS DE ROMILLY

Note sur certaines équations différentielles obtenues par l'élimination de deux fonctions arbitraires

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 64-72
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__64_1>

Note sur certaines équations différentielles obtenues par l'élimination de deux fonctions arbitraires; par M. Worms de Romilly.

(Séance du 16 janvier 1880.)

Étant donnée une fonction explicite z de deux fonctions arbitraires F_1, F_2, qui sont elles-mêmes fonctions de fonctions données φ_1 et φ_2 de x et de y, on peut se proposer d'éliminer les fonctions arbitraires et de trouver une relation entre la fonction explicite z de F_1 et F_2, les fonctions φ_1 et φ_2 et leurs différentielles.

Nous supposerons, ce qui n'enlève rien à la généralité du problème, que F_1 ne dépend que de φ_1 et F_2 que de φ_2. Soit donc

$$(1) \qquad z = f[F_1(\varphi_1), F_2(\varphi_2)].$$

Prenons les dérivées partielles du premier et du second ordre par rapport à x et à y, et désignons par p, q, r, s, t ces dérivées partielles :

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad r = \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2 z}{dx\,dy}, \quad t = \frac{d^2 z}{dy^2}.$$

Nous représenterons par a, b, c, d, e les dérivées de φ_1 prises dans le même ordre, et par α, β, γ, δ, ε celles de φ_2.

Pour simplifier l'écriture, nous poserons, en outre,

$$(2) \qquad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{df}{dF_1}\dfrac{dF_1}{d\varphi_1}, \\ \mu_1 = \dfrac{d^2 f}{dF_1^2}\left(\dfrac{dF_1}{d\varphi_1}\right)^2 + \dfrac{df}{dF_1}\dfrac{d^2 F_1}{d\varphi_1^2}, \end{cases}$$

et nous appellerons λ_2, μ_2 les expressions obtenues en remplaçant dans les seconds membres des relations précédentes l'indice 1 par l'indice 2; enfin nous désignerons par ρ la différentielle

$$(3) \qquad \rho = \frac{d^2 f}{dF_1\,dF_2}\frac{dF_1}{d\varphi_1}\frac{dF_2}{d\varphi_2}.$$

Par de simples différentiations, nous obtiendrons les cinq équations suivantes :

$$\begin{aligned} p &= a\lambda_1 + \alpha\lambda_2, \\ q &= b\lambda_1 + \beta\lambda_2, \\ r - 2a\alpha\rho &= c\lambda_1 + \gamma\lambda_2 + a^2\mu_1 + \alpha^2\mu_2, \\ s - (a\beta + \alpha b)\rho &= d\lambda_1 + \delta\lambda_2 + ab\mu_1 + \alpha\beta\mu_2, \\ t - 2b\beta\rho &= e\lambda_1 + \varepsilon\lambda_2 + b^2\mu_1 + \beta^2\mu_2. \end{aligned}$$

Si nous considérons comme inconnues les quantités λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, ces cinq équations entre quatre inconnues donneront une équation de condition qui peut être mise sous forme de déterminant :

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} -p & a & \alpha & 0 & 0 \\ -q & b & \beta & 0 & 0 \\ -r+2a\alpha\rho & c & \gamma & a^2 & \alpha^2 \\ -s+(a\beta+\alpha b)\rho & d & \delta & ab & \alpha\beta \\ -t+2b\beta\rho & e & \varepsilon & b^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant peut se décomposer en deux, et, en appelant D le suivant :

$$(5)\qquad D = \begin{vmatrix} p & a & \alpha & 0 & 0 \\ q & b & \beta & 0 & 0 \\ r & c & \gamma & a^2 & \alpha^2 \\ s & d & \delta & ab & \alpha\beta \\ t & e & \varepsilon & b^2 & \beta^2 \end{vmatrix},$$

la relation (4) peut s'écrire

$$-D + \rho \begin{vmatrix} 2a\alpha & a^2 & \alpha^2 \\ a\beta+\alpha b & ab & \alpha\beta \\ 2b\beta & b^2 & \beta^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en effectuant les calculs, il vient enfin

$$(6)\qquad -D + (a^2\beta^2 - \alpha^2 b^2)^2 \rho = 0.$$

La quantité que nous avons représentée par ρ peut se mettre sous une autre forme que (3). En effet, si nous remplaçons $\frac{dF_1}{d\varphi_1}$, $\frac{dF_2}{d\varphi_2}$ par leurs valeurs tirées des relations (2), nous trouvons

$$\rho = \frac{\lambda_1\lambda_2 \dfrac{d^2 f}{dF_1\, dF_2}}{\dfrac{df}{dF_1}\,\dfrac{df}{dF_2}};$$

mais les différentielles du premier ordre de z nous donnent les valeurs de λ_1, λ_2, de sorte que, en faisant la substitution, on a

$$\rho = \frac{\dfrac{d^2 f}{dF_1\, dF_2}}{\dfrac{df}{dF_1}\,\dfrac{df}{dF_2}}\;\frac{(aq-bp)(\beta p - \alpha q)}{(a\beta - \alpha b)^2}.$$

La relation (6) peut donc se mettre sous la forme

$$(7) \qquad D + (aq - bp)(\alpha q - \beta p)(a\beta + \alpha b)^2 \frac{\dfrac{d^2 f}{dF_1 dF_2}}{\dfrac{df}{dF_1}\dfrac{df}{dF_2}} =$$

Pour que cette équation soit indépendante des fonctions arbitraires, il faut que le dernier facteur du second terme puisse s'exprimer au moyen de z, c'est-à-dire, en représentant par $\psi(z)$ une certaine fonction explicite de z, que l'on ait

$$\frac{\dfrac{d^2 f}{dF_1 dF_2}}{\dfrac{df}{dF_1}\dfrac{df}{dF_2}} = \psi(z),$$

ou, en remplaçant les lettres F_1, F_2 par u et v, que l'on ait

$$(8) \qquad \frac{d^2 z}{du\,dv} = \psi(z)\frac{dz}{du}\frac{dz}{dv}.$$

Considérons maintenant le problème inverse; supposons que l'on parte de l'équation différentielle pour remonter à la fonction z. Le déterminant D ne contient les différentielles p, q, r, s, t qu'au premier degré, le second terme ne les contient qu'au second degré, de sorte que, si l'on représente par

$$(9) \qquad D + A\psi = 0$$

l'équation (7), on pourra mettre sous la forme correspondante

$$(10) \qquad D_1 + B_1 = 0$$

l'équation différentielle donnée.

Or nous montrerons que la connaissance de D_1 suffit pour déterminer φ_1 et φ_2. Ce premier résultat obtenu, en remplaçant a, b, ... par leurs valeurs dans A, on calculera la valeur A_1 que doit avoir A dans la relation (10), et, en divisant B_1 par A_1, on trouvera $\psi(z)$. Le problème sera alors ramené à l'intégration de l'équation (8). Nous supposerons d'abord qu'aucun facteur commun aux deux termes n'a été supprimé dans l'équation (10), de sorte que le premier membre est identique à l'expression obtenue en remplaçant, dans (7), a, b, ... par leurs valeurs déduites de celles de φ_1, φ_2 sans suppression d'aucun facteur commun à tous les termes de l'équation.

Considérons d'abord le déterminant D; si nous effectuons les calculs, il se mettra sous la forme

$$D = Pp + Qq + Rr + Ss + Tt, \tag{11}$$

où nous avons posé

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} P &= [(a\beta + \alpha b)(\beta d - b\delta) + b\beta(b\gamma - \beta c) + a\alpha(b\varepsilon - \beta e)](a\beta - \alpha b), \\ -Q &= [(a\beta + \alpha b)(\alpha d - a\delta) + b\beta(a\gamma - \alpha c) + a\alpha(a\varepsilon - \alpha e)](a\beta - \alpha b), \\ R &= (a\beta - \alpha b)^2 b\beta, \\ -S &= (a\beta - \alpha b)^2 (a\beta + \alpha b). \\ T &= (a\beta - \alpha b)^2 a\alpha. \end{aligned}\right.$$

On tire des trois dernières équations les rapports

$$\frac{S}{T} = -\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{b}{a}\right), \quad \frac{R}{T} = \frac{b}{a}\frac{\beta}{\alpha},$$

de sorte que l'équation

$$X^2 + \frac{S}{T}X + \frac{R}{T} = 0 \tag{13}$$

a pour racines $\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{b}{a}$; on peut donc exprimer ces quantités en fonction de $\frac{S}{T}$ et de $\frac{R}{T}$, et, comme les rapports des quantités S, R, T entrent seuls dans la relation, peu importe qu'un facteur commun à tous les termes ait été supprimé dans l'équation donnée (10). Le problème pour déterminer φ_1 et φ_2 se trouve donc ramené à l'intégration de

$$\frac{d\varphi}{dy} = \Phi(x, y)\frac{dy}{dx}, \tag{14}$$

dans laquelle $\Phi(x, y)$ représente la valeur de l'une des racines de l'équation (14); l'une des racines donnera φ_1 et l'autre φ_2.

Les coefficients de r, s, t suffisent donc pour déterminer les fonctions φ; si l'équation (11) correspond à une équation de la forme (1), il faudra donc que les coefficients de p et q satisfassent chacun à une équation de condition. Or R, S, T sont des fonctions de φ_1, φ_2 et de leurs différentielles; donc, puisque P et Q ne dépendent que des mêmes quantités, on devra pouvoir exprimer P et Q en fonction de R, S, T, et les relations qui représenteront la valeur de P et Q au moyen de R, S, T devront être satisfaites. Cherchons quelles sont ces relations. Il est facile de voir que, en posant, pour abréger,

$$N = (a\beta - \alpha b), \tag{15}$$

P et Q peuvent se mettre sous les formes suivantes :

$$P = N^3\left(b\frac{d\frac{\beta}{N}}{dx} - a\frac{d\frac{\beta}{N}}{dy}\right),$$

$$Q = -N^3\left(b\frac{d\frac{\alpha}{N}}{dx} - a\frac{d\frac{\alpha}{N}}{dy}\right),$$

ou bien, en remarquant que $\frac{db}{dx} = \frac{da}{dy}$,

$$\left\{\begin{aligned} P &= N^3\left(\frac{d\frac{b\beta}{N}}{dx} - \frac{d\frac{\alpha\beta}{N}}{dy}\right),\\ Q &= -N^3\left(\frac{d\frac{\alpha b}{N}}{dx} - \frac{d\frac{a\alpha}{N}}{dy}\right).\end{aligned}\right. \tag{16}$$

Or nous pouvons exprimer $b\beta$, $a\beta$, αb, $a\alpha$ au moyen de R, S, T et N; nous avons, en effet,

$$\left\{\begin{aligned} a\alpha &= \frac{T}{N^2}, & b\beta &= \frac{R}{N^2},\\ \alpha b &= -\frac{S + N^3}{2N^2}, & a\beta &= \frac{N^3 - S}{2N^2}.\end{aligned}\right. \tag{17}$$

Si l'on remplace, dans les valeurs de P et de Q, les quantités a, α, b, β par leurs valeurs, on trouve, toutes réductions faites

$$\left\{\begin{aligned} P &= \frac{dR}{dx} - \frac{3R}{N}\frac{dN}{dx} + \frac{1}{2}\frac{dS}{dy} - \frac{3}{2}\frac{S}{N}\frac{dN}{dy},\\ Q &= \frac{dT}{dy} - \frac{3T}{N}\frac{dN}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dS}{dx} + \frac{3}{2}\frac{S}{N}\frac{dN}{dx}.\end{aligned}\right. \tag{18}$$

Il n'y a d'inconnu que N, mais il est facile de trouver la valeur de cette quantité en fonction des coefficients de l'équation donnée. On voit en effet immédiatement, par les formules (12), que l'on a

$$S^2 - 4RT = N^4(a^2\beta^2 + \alpha^2 b^2 - 2a\alpha b\beta) = N^6,$$

de sorte que

$$N = (S^2 - 4RT)^{\frac{1}{6}}.$$

Voyons si ces relations auraient encore lieu dans le cas où l'on aurait supprimé, dans l'équation différentielle donnée, un facteur commun K; les coefficients P', Q', ... seraient alors liés à P, Q, ... par les relations

$$P = P'K, \quad Q = Q'K, \quad R = R'K, \quad S = S'K, \quad T = T'K,$$

d'où

$$N = K^{\frac{1}{3}}(S'^2 - 4R'T')^{\frac{1}{6}} = K^{\frac{1}{3}}N'.$$

Remplaçons P, Q, ... par ces valeurs dans les relations (18); on trouve, après réduction,

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} P' &= \frac{dR'}{dx} - \frac{3R'}{N'}\frac{dN'}{dx} + \frac{1}{2}\frac{dS'}{dy} - \frac{3}{2}\frac{S'}{N'}\frac{dN'}{dy}, \\ Q' &= \frac{dP'}{dy} - \frac{3T'}{N'}\frac{dN'}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dS'}{dx} + \frac{3}{2}\frac{S'}{N'}\frac{dN'}{dx}, \\ N' &= (S'^2 - 4R'T')^{\frac{1}{6}}. \end{aligned}\right.$$

Les relations sont donc encore les mêmes.

Il nous reste à examiner les termes du second degré en p et q qui multiplient $\psi(z)$; le coefficient de $\psi(z)$ dans l'équation (7) peut s'écrire

$$+ (a\beta + \alpha b)^2[a\alpha q^2 + b\beta p^2 - (a\beta + \alpha b)pq],$$

c'est-à-dire

$$+ \frac{S^2}{N^4}\left(\frac{T}{N^2}q^2 + \frac{R}{N^2}p^2 + \frac{S}{N^2}pq\right),$$

ou enfin

$$+ \frac{S^2}{N^6}(Tq^2 + Rp^2 + Spq),$$

et, si l'on a supprimé un facteur K commun à tous les termes, cette quantité devient

$$+\frac{K^2 S'^2}{K^{\frac{6}{3}} N'^6}(KT'q^2 + KR'p^2 + KS'pq)\frac{1}{K},$$

ou enfin

$$(20)\qquad +\frac{S'^2}{N'^6}(T'q^2 + R'p^2 + S'pq),$$

c'est-à-dire que l'expression ne change pas de forme.

Ainsi, pour que l'équation différentielle (10) représente une fonction z de la forme (1), il faut que, en désignant par $\psi(z)$ une fonction quelconque de z, en mettant l'équation donnée sous la forme

$$(21)\qquad P'p + Q'q + R'r + S's + T't + A'p^2 + B'q^2 + C'pq = 0$$

et en posant

$$(22)\qquad N' = (S'^2 - 4RT')^{\frac{1}{6}},$$

les coefficients P', Q', A', B', C' satisfassent aux équations de condition suivantes :

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} P' &= \frac{dR'}{dx} - \frac{3R'}{N'}\frac{dN'}{dx} + \frac{1}{2}\frac{dS'}{dy} - \frac{3}{2}\frac{S'}{N'}\frac{dN'}{dy}, \\ Q' &= \frac{dT'}{dy} - \frac{3T'}{N'}\frac{dN'}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dS'}{dx} + \frac{3}{2}\frac{S'}{N'}\frac{dN'}{dx}, \\ A' &= +\frac{S'^2 R'}{N'^6}, \\ B' &= +\frac{S'^2 T'}{N'^6}, \\ C' &= +\frac{S'^3}{N'^6}. \end{aligned}\right.$$

Si cela a lieu, on pourra trouver la fonction cherchée en intégrant l'équation aux différentielles partielles (8) et les deux équations obtenues en remplaçant, dans (14), $\Phi(x, y)$ successivement par chacune des racines X de l'équation (13).

L'intégration de l'équation aux différentielles partielles

$$(8)\qquad \frac{d^2 z}{du\,dv} = \psi(z)\frac{dz}{du}\frac{dz}{dv}$$

se fait immédiatement; on peut écrire cette équation sous la forme

$$\frac{\dfrac{d\frac{dz}{dv}}{du}}{\dfrac{dz}{dv}} = \psi(z)\frac{dz}{du},$$

ou, en intégrant par rapport à u,

$$\mathrm{L}\frac{dz}{dv} = \int \psi(z)\,dz + \mathrm{L}\,\theta(v),$$

en désignant par θ une fonction quelconque et par L les logarithmes népériens. Cette relation peut se mettre sous la forme

$$e^{-\int\psi(z)dz}dz = \theta(v)\,dv,$$

et, en intégrant de nouveau,

$$\int e^{-\int\psi(z)dz}dz = \int\theta(v)\,dv + \tau_1(u),$$

on peut remplacer l'intégrale de $\theta(v)$, qui est indéterminée, par une fonction quelconque de v. On a donc enfin

$$(24) \qquad \int e^{-\int\psi(z)dz}dz = \tau_1(u) + \tau_2(v) = \tau_1(\mathrm{F}_1) + \tau_2(\mathrm{F}_2),$$

ce qui détermine la fonction z.

Ainsi, pour que la fonction z définie par la relation (1) puisse donner lieu à une équation différentielle du second ordre indépendante des fonctions arbitraires F_1 et F_2, il faut que la fonction f soit de forme telle qu'il existe deux fonctions τ_1, τ_2, dépendant l'une de F_1 seul, l'autre de F_2 seul, dont la somme puisse s'exprimer en fonction de z.

Nous avons montré comment, dans ce cas, on peut remonter de l'équation différentielle à la fonction intégrale.