BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega}$

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 36-52
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__36_1>

Sur la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega$; par M. Laguerre.

(Séance du 5 décembre 1879.)

I.

1. Soit, en désignant par ω une constante arbitraire,

$$z=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega;$$

je me propose d'abord de développer z en fractions continues, et, à cet effet, je poserai

$$z = \frac{\varphi_n}{f_n} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right) \quad (1),$$

φ_n et f_n désignant deux polynômes entiers en x du degré n, que j'écrirai aussi $\varphi_n(x)$, $f_n(x)$ et $\varphi_n(x, \omega)$, $f_n(x, \omega)$ lorsque je voudrai mettre en évidence la variable x et la constante ω.

Comme z tend vers l'unité quand x croît indéfiniment, on voit que les coefficients de x^n sont égaux dans les deux polynômes; z se changeant d'ailleurs en $\frac{1}{z}$ quand on change le signe de x, on en conclut la relation

$$\varphi_n(x) = (-1)^n f_n(-x);$$

on a aussi évidemment

$$\varphi_n(x, \omega) = f_n(x, -\omega).$$

2. Je rappellerai d'abord les résultats obtenus dans la Note que j'ai présentée récemment à la Société *Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels.*

Soit proposé de réduire en fractions continues une fonction z satisfaisant à l'équation différentielle

$$Wz' = Vz + U,$$

où U, V et W désignent des polynômes entiers en x, et soit $\frac{\varphi_n}{f_n}$ la réduite de rang n.

Représentons par Θ_n un polynôme entier du degré de

$$V\left(\frac{1}{x}\right) + W\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et par A_n une constante dont la valeur ne dépend que du nombre

---

(1) Ici, comme dans tout ce qui suit, je désigne généralement par $\left(\frac{1}{x^p}\right)$ une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et commençant par un terme de l'ordre de $\frac{1}{x^p}$.

entier n et est actuellement indéterminée; on a

$$f_n^2 U + f_n \varphi_n V - (\varphi_n' f_n - f_n' \varphi_n) W = A_n \Theta_n,$$

et l'on voit que f_n satisfait à une équation linéaire du second ordre de la forme

$$W y'' + W_0 y' + W_1 y = 0,$$

où

$$W_0 = V + W' - W \frac{\Theta_n'}{\Theta_n} \quad \text{et} \quad W_1 = \frac{K_n}{\Theta_n},$$

K_n désignant un polynôme entier en x.

Une seconde solution de cette équation est donnée par la formule

$$y_1 = e^{-\int \frac{V}{W} dx} (\varphi_n - f_n z).$$

En posant de plus, pour abréger,

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = P_n,$$

on a les relations suivantes :

$$(A) \qquad \begin{cases} W f_n' = \Omega_n f_n - \Theta_n f_{n+1}, \\ f_{n+1} - \dfrac{\Omega_n + \Omega_{n+1} + V}{\Theta_{n+1}} f_n + P_{n-1} f_{n-1} = 0. \end{cases}$$

La première de ces relations détermine le degré et la forme de Ω_n; on déterminera complètement ce polynôme en exprimant que, pour une valeur convenable de P_n, l'expression

$$u = e^{\int \frac{\Omega_n}{W} dx}$$

satisfait à l'équation différentielle

$$W u'' + W_0 u' + \left(W_1 - \frac{P_n \Theta_n \Theta_{n+1}}{W}\right) u = 0.$$

3. La fonction $z = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^\omega$ satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2 - 1) z' + 2\omega z = 0;$$

dans le cas actuel, nous avons donc

$$W = x^2 - 1, \quad V = -2\omega \quad \text{et} \quad U = 0,$$

d'où il résulte d'abord que Θ_n est une constante que nous ferons égale à -1.

L'équation différentielle qui a pour solutions f_n et $\varphi_n \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^\omega$ est

$$(1) \qquad (x^2-1)y'' + 2(x-\omega)y' - n(n+1)y = 0.$$

Nous déterminerons P_n et Ω_n par la condition que $u = e^{\int \frac{\Omega_n}{x^2-1} dx}$ satisfasse à l'équation

$$(x^2-1)u'' + 2(x-\omega)u' - \left[n(n+1) + \frac{P_n}{x^2-1}\right]u = 0.$$

Ω_n étant du premier degré en x, u est de la forme $(x-1)^\alpha(x+1)^\beta$; en substituant cette expression dans l'équation précédente, on trouve les équations de condition qui suivent :

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1) = n(n+1), \quad \alpha - \beta = \omega$$

et

$$P_n = n(n+1) - (\alpha+\beta) - \omega^2.$$

On peut y satisfaire de deux façons différentes.

En premier lieu, on peut poser

$$\alpha + \beta = n, \quad \text{d'où} \quad P_n = n^2 - \omega^2$$

et

$$\alpha = \frac{n+\omega}{2}, \quad \beta = -\frac{n-\omega}{2}.$$

On en déduit

$$\Omega_n = \frac{x^2-1}{2}\left(\frac{n+\omega}{x-1} + \frac{n-\omega}{x+1}\right) = nx + \omega;$$

mais il est facile de voir que cette solution ne convient pas à la question. En effet, en posant $f_0 = 1$ et faisant $n = 0$, on aurait, en vertu de la première des formules (A),

$$f_1 = -\omega,$$

ce qui est impossible, puisque f_1 est nécessairement du premier degré en x.

Posons donc

$$\alpha + \beta = -(n+1), \quad \text{d'où} \quad P_n = (n+1)^2 - \omega^2$$

et

$$\alpha = \frac{\omega - n - 1}{2}, \quad \beta = -\frac{\omega + n + 1}{2}.$$

On en déduit

$$\Omega_n = \omega - (n+1)x,$$

et les formules (A) deviennent

$$(2) \qquad (x^2 - 1) f'_n = [\omega - (n+1)x] f_n + f_{n+1},$$

$$(3) \qquad f_{n+1} - (2n+1) x f_n + (n^2 - \omega^2) f_{n-1} = 0.$$

En changeant ω en $-\omega$, on obtient encore les formules suivantes :

$$(2)' \qquad (x^2 - 1)\varphi'_n = -[\omega + (n+1)x]\varphi_n + \varphi_{n+1},$$

$$(3)' \qquad \varphi_{n+1} - (2n+1)x\varphi_n + (n^2 - \omega^2)\varphi_{n-1} = 0.$$

On a d'ailleurs

$$(4) \qquad (x^2 - 1)(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n) + 2\omega\varphi_n f_n = A_n.$$

Au moyen de ces formules, on trouve ces valeurs des premiers polynômes :

$$f_0 = 1, \quad f_1 = x - \omega, \quad f_2 = 3x^2 - 3\omega x + \omega^2 - 1,$$
$$f_3 = 15x^3 - 15\omega x^2 + (6\omega^2 - 9)x - \omega(\omega^2 - 4).$$

Du reste, l'équation (1) s'intégrant au moyen des séries hypergéométriques, on obtient aisément l'expression suivante :

$$(5) \left\{ \begin{aligned} f_n = {} & (-1)^n (\omega+1)(\omega+2)\ldots(\omega+n) \\ & \times \left[1 - \frac{n}{1}\,\frac{n+1}{\omega+1}\left(\frac{1+x}{2}\right) + \frac{n(n+1)}{1.2}\,\frac{(n+1)(n+2)}{(\omega+1)(\omega+2)}\left(\frac{1+x}{2}\right)^2 + \ldots \right. \\ & \left. \qquad + (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{(\omega+1)(\omega+2)\ldots(\omega+n)}\left(\frac{1+x}{2}\right)^n \right]. \end{aligned} \right.$$

Des formules (4) et (5) on déduit, en y faisant $x = 1$ et en remarquant que $\varphi_n(\omega) = f_n(-\omega)$,

$$(6) \qquad A_n = 2\omega(1 - \omega^2)(1 - 4\omega^2)\ldots(1 - n^2\omega^2),$$

ce qui concorde bien avec la valeur trouvée pour P_n.

4. Si l'on désigne, en général, par S_p la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation $f_n = 0$, on a

$$S_1 = S_3 = S_5 = \ldots = S_{2n-1} = \omega \quad (^1);$$

cette propriété est caractéristique du polynôme f_n.

Je ferai encore les remarques suivantes. Posons, en ordonnant f_n par rapport aux puissances croissantes de ω,

$$f_n = P_0 + \omega P_1 + \omega^2 P_2 + \ldots + \omega^n P_n.$$

De l'équation

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega} = \frac{P_0 - \omega P_1 + \omega^2 P_2 + \ldots}{P_0 + \omega P_1 + \omega^2 P_2 + \ldots} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$$

on déduit, en développant les deux membres suivant les puissances croissantes de ω et égalant les coefficients de la première puissance,

$$\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{2P_1}{P_0} + \frac{1}{x^{2n+1}},$$

d'où il résulte que $\frac{P_1}{P_0}$ est la $n^{\text{ième}}$ réduite de la fonction

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

En désignant, en effet, suivant l'usage ordinaire, par X_n le polynôme de Legendre et par $\Pi(n)$ le produit $1.2\ldots n$, on a

$$P_0 = \Pi(n) X_n.$$

Désignons, dans f_n, par $H(x, \omega)$ l'ensemble des termes homogènes et du degré n par rapport aux deux quantités x et ω; on verra aussi facilement que $H(1, \omega)$ est le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite de $e^{\frac{\omega}{2}}$.

II.

5. La réduction en fractions continues de la fonction $\left(\frac{x+1}{x+1}\right)^{\omega}$

---

(1) *Voir*, à ce sujet, ma Note *Sur un problème d'Algèbre* (*Bulletin*, t. V, p. 30).

est liée intimement avec le développement de la fonction $(x+z)^\omega$ suivant les puissances croissantes de (z^2-1).

Soit, en effet,

$$(7)\qquad (x+z)^\omega = \sum (V_n + zU_n)\frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n)}.$$

Pour obtenir ce développement d'après la méthode donnée par Jacobi [1], nous poserons

$$(z+x)^\omega = b_0 x^\omega + b_1 x^{\omega-1}z + \ldots + b_i x^{\omega-i}z^i + \ldots$$

et

$$\frac{1}{(z^2-1)^{n+1}} = \frac{A_1}{z^{2n+2}} + \frac{A_2}{z^{2n+4}} + \ldots.$$

Si, dans le produit de ces deux séries, nous prenons l'ensemble des termes $\frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2}$ qui sont du premier et du second degré en $\frac{1}{z}$, nous voyons aisément que B_1 est de l'ordre de $x^{\omega-2n-1}$ et B_2 de l'ordre de $z^{\omega-2n}$. Or $V_n + zU_n$ est la partie entière de

$$(z^2-1)\left(\frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2}\right);$$

on a donc

$$U_n = B_1,$$

et, par suite, U_n est de l'ordre de $x^{\omega-2n-1}$.

6. Ce point essentiel étant établi, en dérivant successivement par rapport à x et par rapport à z l'identité (6), j'obtiens les relations

$$\begin{aligned}\omega(x+z)^{\omega-1} &= \sum (V'_n + zU'_n)\frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n)}\\ &= \sum U_n\frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n)} + \sum (V_n z + U_n z^2)\frac{(z^2-1)^{n-1}}{2^n\Pi(n-1)}\\ &= \sum (2n+1)U_n\frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n)} + \sum (U_n + V_n z)\frac{(z^2-1)^{n-1}}{2^n\Pi(n-1)},\end{aligned}$$

---

[1] *Entwickelung nach den Potenzen eines ganzen Polynoms* (*Journal de Borchardt*, t. 53, p. 103).

d'où les identités

$$V'_n = (2n+1)U_n + U_{n+1} \quad \text{et} \quad U'_n = V_{n+1}.$$

On a de même

$$\omega(x+z)^\omega = \omega \sum (V_n + zU_n) \frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n)} = \sum (V'_n + zU'_n)(z+x) \frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n)}$$
$$= \sum 2(n+1)U'_n \frac{(z^2-1)^{n+1}}{2^{n+2}\Pi(n+1)}$$
$$+ \sum [U'_n + xV'_n + (V'_n + xU'_n)] \frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n)},$$

d'où

$$\omega V_n = 2nU'_{n-1} + U'_n + xV'_n$$

et

$$\omega U_n = V'_n + xU'_n.$$

On en déduit aisément les relations suivantes :

$$(\mathrm{B}) \begin{cases} V_n = U'_{n-1}, \\ (x^2-1)U''_n + 2x(n+1-\omega)U'_n - \omega(2n+1-\omega)U_n = 0, \\ U_{n+1} + (2n+1-\omega)U_n + xU'_n = 0, \\ (x^2-1)U_{n+1} + [(2n+1)x^2 + 2\omega - 4n - 1]U_n \\ \qquad - (2n-\omega)(2n-\omega-1)U_{n-1} = 0, \\ U_{n+1} + (2n+1)U_n - U''_{n-1} = 0. \end{cases}$$

7. Un calcul direct donne

$$U_0 = (x+1)^\omega - (x-1)^\omega,$$
$$U_1 = (x+1)^{\omega-1}(\omega - 1 - x) - (x-1)^{\omega-1}(1 - \omega - x),$$

et la dernière des formules précédentes permet de calculer facilement de proche en proche les diverses valeurs de U_n.

On voit que U_n est de la forme

$$F_n(x+1)^{\omega-n} - \Phi_n(x-1)^{\omega-n},$$

où F_n et Φ_n désignent des polynômes entiers en x du degré n, et, d'après la remarque que j'ai faite ci-dessus, on a

$$F_n(x+1)^{\omega-n} - \Phi_n(x-1)^{\omega-n} = \left(\frac{x^\omega}{x^{2n+1}}\right),$$

d'où

$$F_n\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega-n} - \Phi_n = \left(\frac{1}{x^{n+1}}\right),$$

ce qui montre que $\frac{\Phi_n}{F_n}$ est la $n^{\text{ième}}$ réduite de $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega-n}$. Par suite, F_n et Φ_n ne diffèrent que par un nombre constant de $f_n(\omega-n)$ et de $\varphi_n(\omega-n)$; si d'ailleurs on désigne, pour un instant, par M_n le coefficient de x^n dans F_n, on déduit des formules précédentes

$$M_{n+1} = -(2n+1)M_n$$

et

$$M_n = (-1)^n . 1.3.5 - (2n-1),$$

d'où l'on voit que

$$F_n = (-1)^n f_n(\omega-n), \quad \Phi_n = (-1)^n \varphi_n(\omega-n)$$

et

$$U_n = (-1)^n[(x+1)^{\omega-n} f_n(\omega-n) - (x-1)^{\omega-n}\varphi_n(\omega-n)].$$

Transformons les relations (B) en posant

$$U_n = (-1)^n (x+1)^{\omega-n} f_n(\omega-n),$$

puis changeons ensuite ω en $\omega+n$.

On trouvera tout d'abord, comme nous y sommes arrivé par une voie différente, que f_n satisfait à l'équation du second ordre (1), puis les relations suivantes :

$$f_{n+1}(\omega-1) = [(n+1)x + n + 1 - \omega] f_n(\omega) + x(x+1) f'_n(\omega),$$

$$(x-1) f_{n+1}(\omega-1) + [(2n+1)x^2 + 2\omega - 2n - 1] f_n(\omega)$$
$$+ (2n-\omega)(2n-\omega-1)(x+1) f_{n-1}(\omega+1),$$

d'où, en éliminant $f'_n(\omega)$ au moyen de la formule (2),

$$(8) \qquad (x-1) f_{n+1}(\omega-1) = (\omega-n-1) f_n(\omega) + x f_{n+1}(\omega).$$

8. De la formule (7) on déduit

$$(x+z)^\omega - (x-z)^\omega = \sum \frac{2z\, U_n(z^2-1)^n}{2^{n+1}\,\Pi(n)},$$

d'où, en intégrant entre les limites 1 et z,

$$(x+z)^{\omega+1}+(x-z)^{\omega+1}=(x+1)^{\omega+1}$$
$$+(x-1)^{\omega+1}+(\omega+1)\sum\frac{U_n(z^2-1)^{n+1}}{2^{n+1}\Pi(n+1)}.$$

Posons $z=1+\sqrt{t}$; il viendra

$$(x+\sqrt{1+t})^{\omega+1}+(x-\sqrt{1+t})^{\omega+1}$$
$$=(x+1)^{\omega+1}+(x-1)^{\omega+1}$$
$$+(\omega+1)\sum\frac{(-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n+1)}[(x+1)^{\omega-n}f_n(\omega-n)-(x-1)^{\omega-n}\varphi_n(\omega-n)]t^{n+1}.$$

Cette équation se décompose évidemment en deux autres, dont l'une est

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}&(x+\sqrt{1+t})^{\omega+1}=(x+1)^{\omega+1}\\&\qquad+(\omega+1)\sum\frac{(-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n+1)}(x+1)^{\omega-n}f_n(\omega-n)t^{n+1}.\end{aligned}\right.$$

Changeons, dans cette formule, t en $\frac{t}{x}$ et x en $\frac{1}{\sqrt{x}}$; il viendra

$$(1+\sqrt{x+t})^{\omega+1}=(1+\sqrt{x})^{\omega+1}$$
$$+(\omega+1)\sum\frac{(-1)^n}{2^{n+1}\Pi(n+1)}\frac{(1+\sqrt{x})^{\omega-n}}{x^{\frac{n+1}{2}}}f_n\left(\frac{1}{\sqrt{x}},\omega-n\right)t^{n+1},$$

d'où, en vertu de la formule de Taylor,

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(1+\sqrt{x})^{\omega+1}=\frac{(-1)^n(\omega+1)}{2^{n+1}\Pi(n+1)}\frac{(1+\sqrt{x})^{\omega-n}}{x^{\frac{n+1}{2}}}f_n\left(\frac{1}{\sqrt{x}},\omega-n\right),$$

et, en changeant ω en $\omega+n$,

$$(10)\quad f_n\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{(-1)^n2^{n+1}x^{\frac{n+1}{2}}}{(\omega+n+1)(1+\sqrt{x})^{\omega}}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(1+\sqrt{x})^{\omega+n+1};$$

en particulier, pour les polynômes de Legendre, on a la formule

$$X_n\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{(-1)^n2^{n+1}x^{\frac{n+1}{2}}}{\Pi(n+1)}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(1+\sqrt{x})^{n+1}.$$

III.

9. En désignant, pour un instant, par Y_n la série hypergéométrique

$$1 - \frac{n}{1}\frac{n+1}{\omega+1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(n+1)(n+2)}{(\omega+1)(\omega+2)} - \dots,$$

on a

$$f_n = (-1)^n \frac{\Pi(n+\omega)}{\Pi(\omega)} Y_n;$$

en se servant de l'expression remarquable donnée par Jacobi pour les polynômes qui proviennent de la série hypergéométrique ([1]), on en déduit

$$(11) \qquad f_n = \frac{1}{2^n}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\omega} \frac{d^n}{dx^n}(x+1)^{\omega+n}(x-1)^{n-\omega}.$$

10. La fonction

$$f_n - \varphi_n\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\omega}$$

satisfaisant à l'équation différentielle

$$(x^2-1)y'' + 2(x-\omega)y' - n(n+1)y = 0,$$

on en déduit aisément que la fonction

$$(x+1)^{\omega} f_n - (x-1)^{\omega}\varphi_n$$

satisfait à l'équation

$$(x^2-1)u'' - 2(\omega-1)xu' + [\omega(\omega-1) - n(n+1)]u = 0.$$

En la différentiant p fois de suite, on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned}(x^2-1)u^{(p+2)} &- 2(\omega-p-1)xu^{(p+1)} \\ &+ [(\omega-p-1)(\omega-p) - n(n+1)]u = 0.\end{aligned}$$

Comme elle ne diffère de l'équation précédente que par le changement de ω en $(\omega-p)$, on en conclut que la $p^{\text{ième}}$ dérivée de

---

([1]) JACOBI, *Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe* (*Journal de Borchardt*, t. 56, p. 149).

$(x+1)^\omega f_n$ ne diffère que par un facteur constant de la fonction $(x+1)^{\omega-p} f_n(\omega-p)$. Ce facteur se détermine facilement, et l'on obtient l'identité suivante :

$$(12)\quad \frac{d^p}{dx^p}(x+1)^\omega f_n(x,\omega) = \frac{\Pi(\omega+n)}{\Pi(\omega+n-p)}(x+1)^{\omega-p} f_n(x,\omega-p).$$

En particulier, si l'on fait $\omega = p$, il vient

$$(13)\qquad \frac{d^p}{dx^p}(x+1)^p f_n(x,p) = \Pi(n+p)\,X_n.$$

Si, dans cette formule, on fait $p = n$, comme

$$f_n(x,n) = \frac{\Pi(2n)}{2^n\,\Pi(n)}(x-1)^n,$$

on retrouve la formule connue, due à O. Rodrigues,

$$X_n = \frac{1}{2^n\,\Pi(n)}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

11. La formule (13) montre que, p étant un nombre entier positif, $(x+1)^p f_n(x,p)$ peut s'obtenir en intégrant plusieurs fois de suite le polynôme X_n.

Considérons, d'une façon plus générale, l'expression

$$I = \int_{-1}^{x}(x-z)^{\omega-1}\,X_n(z)\,dz,$$

où ω désigne un nombre quelconque positif.

En intégrant par parties, on a

$$I = \frac{(x+1)^\omega}{\omega}\Bigg[X_n(-1) + \frac{X'_n(-1)}{\omega+1}(x+1) + \frac{X''_n(-1)}{(\omega+1)(\omega+2)}(x+1)^2 + \ldots\Bigg],$$

et, en partant de l'expression

$$X_n = (-1)^n\Bigg[1 - \frac{n}{1}\,\frac{(n+1)}{1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \ldots\Bigg],$$

on trouve aisément

$$X_n(-1) = (-1)^n, \quad X'_n(-1) = -\frac{n}{1}(n+1)\frac{(-1)^n}{2},$$

$$X''(-1) = \frac{n(n-1)}{1.2}(n+1)(n+2)\frac{(-1)^n}{2^2}, \quad \ldots;$$

on en déduit

$$I = \frac{(-1)^n(x+1)^\omega}{\omega}\left[1 - \frac{n}{1}\frac{n+1}{\omega+1}\left(\frac{x+1}{2}\right) \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(n+1)(n+2)}{(\omega+1)(\omega+2)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \ldots\right],$$

où la quantité entre crochets est, à un facteur numérique près, le polynôme f_n, d'où l'identité suivante :

$$(14) \qquad f_n(x, \omega) = \frac{\Pi(\omega+n)}{\Pi(\omega-1)}(x+1)^{-\omega}\int_{-1}^{x}(x-z)^{\omega-1}X_n(z)\,dz.$$

Cette formule suppose essentiellement que ω est positif; comme l'on a

$$f_n(x, -\omega) = (-1)^n f_n(-x, \omega),$$

on a également, ω étant toujours supposé positif,

$$(14)' \quad f_n(x, -\omega) = \frac{\Pi(\omega+n)}{\Pi(\omega-1)}(x-1)^{-\omega}\int_{1}^{x}(x-z)^{\omega-1}X_n(z)\,dz.$$

On en déduit, en remarquant que $f_n(x, -\omega) = \varphi_n(x, \omega)$,

$$\frac{\Pi(\omega-1)}{\Pi(\omega+n)}[f_n(x+1)^\omega - \varphi_n(x-1)^\omega] = \int_{-1}^{+1}(x-z)^{\omega-1}X_n(z)\,dz.$$

Si donc on pose

$$(x-z)^{\omega-1} = \Sigma A_n X_n(z),$$

on a, en vertu d'une formule connue,

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}(x-z)^{\omega-1}X_n(z)\,dz,$$

d'où

$$A_n = \frac{2n+1}{2\omega(\omega+1)\ldots(\omega+n)}[f_n(x+1)^\omega - \varphi_n(x-1)^\omega] \quad (^1).$$

---

(1) Sur ce développement, *voir* le Mémoire de M. Bauer *Von den Coefficienten der Reihen von Kugelfunctionen einer Variabeln* (*Journal de Borchardt*, t. 56, p. 101).

12. Si, dans la formule (12), on fait $\omega = 0$, et si l'on remarque que

$$f_n(x, 0) = \Pi(n)\,X_n,$$

il vient

$$f_n(x, -p) = \Pi(n-p)(x+1)^p \frac{d^p}{dx^p} X_n;$$

dans cette identité, p désigne zéro ou un nombre entier positif inférieur à $(n+1)$. Nous pouvons en déduire aisément une expression nouvelle de la fonction $\frac{f_n}{\omega(\omega+1)\ldots(\omega+n)}$; posons, en effet

$$\frac{f_n(x, \omega)}{\omega(\omega+1)\ldots(\omega+n)} = \frac{A_0}{\omega} + \frac{A_1}{\omega+1} + \cdots + \frac{A_i}{\omega+i} + \cdots + \frac{A_n}{\omega+n}.$$

D'une formule élémentaire bien connue il résulte que l'on a

$$A_i = (-1)^i \frac{1}{\Pi(i)\,\Pi(n-i)} f_n(x, -i),$$

ou, en vertu de l'identité précédente,

$$A_i = \frac{(-1)^i}{\Pi(i)} (x+1)^i \frac{d^i}{dx^i} X_n,$$

et de là

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{f_n(x, \omega)}{\omega(\omega+1)\ldots(\omega+n)} \\ &= \frac{X_n}{\omega} - \frac{(x+1)}{1}\frac{X'_n}{\omega+1} + \frac{(x+1)^2}{1.2}\frac{X''_n}{\omega+2} - \frac{(x+1)^3}{1.2.3}\frac{X'''_n}{\omega+3} + \cdots. \end{aligned} \right.$$

Si, dans cette formule, on change x en $-x$ et ω en $-\omega$, et si l'on remarque que $f(-x, -\omega) = (-1)^n f(x, \omega)$, on obtiendra encore la formule suivante :

$$(15)'\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{f_n(x, \omega)}{\omega(\omega-1)\ldots(\omega-n)} \\ &= (-1)^n\left[\frac{X_n}{\omega} - \frac{x-1}{1}\frac{X'_n}{\omega-1} + \frac{(x-1)^2}{1.2}\frac{X''_n}{\omega-2} - \frac{(x-1)^3}{1.2.3}\frac{X'''_n}{\omega-3} + \cdots\right]. \end{aligned} \right.$$

13. On sait que les racines de l'équation $X_n = 0$ sont toutes réelles et comprises entre -1 et $+1$; désignons respectivement, pour un instant, par α et β la plus petite et la plus grande de ces racines. Si x désigne une quantité quelconque comprise entre -1 et α, on voit que $(x+1)$ est positif, et il suit du théorème de Fourier que la suite des quantités

$$X_n,\ X'_n,\ X''_n,\ \ldots$$

ne présente aucune permanence de signe; l'équation (15) montre que dans ce cas l'équation $f(x, \omega) = 0$ peut se mettre sous la forme

$$\frac{A}{\omega} + \frac{B}{\omega+1} + \frac{C}{\omega+2} + \cdots + \frac{L}{\omega+n} = 0,$$

A, B, C, ..., L désignant des coefficients ayant tous le même signe.

Par un raisonnement bien connu, on en conclut que toutes les racines de l'équation $f(x, \omega) = 0$ (où ω est regardé comme inconnue) sont réelles et séparées par les nombres

$$0,\ +1,\ +2,\ \ldots,\ +(n-1) \text{ et } +n.$$

On déduirait de même de la formule (15)′ que, si la valeur de x est comprise entre β et $+1$, l'équation $f_n(x, \omega) = 0$ a n racines réelles séparées par les nombres

$$0,\ -1,\ -2,\ \ldots,\ -(n-1) \text{ et } -n.$$

IV.

14. La fonction f_n satisfaisant à l'équation

$$(1)\qquad (x^2-1)y'' + 2(x-\omega)y' - n(n+1)y = 0,$$

on voit que $\dfrac{df_n}{d\omega}$ satisfait à l'équation

$$(x^2-1)u'' + 2(x-\omega)u' - n(n+1)u = 2\frac{df_n}{dx}.$$

En désignant par y une solution quelconque de l'équation (1), on déduit de là

$$(x^2-1)(yu''-uy'')+2(x-\omega)(yu'-uy')=2\frac{df_n}{dx}y,$$

et, en multipliant les deux membres par $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega(x^2-1)(yu'-uy')=2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega\frac{df_n}{dx}y;$$

puis, en intégrant et en remplaçant u par $\frac{df_n}{d\omega}$,

$$2\int\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega\frac{df_n}{dx}y\,dx=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega(x^2-1)\left(y\frac{d^2f_n}{dx\,d\omega}-\frac{df_n}{d\omega}\frac{dy}{dx}\right).$$

Dans cette relation, faisons d'abord

$$y=f_n;$$

il viendra

$$2\int\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega f_n\frac{df_n}{dx}dx=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega(x^2-1)\left(f_n\frac{d^2f_n}{dx\,d\omega}-\frac{df_n}{d\omega}\frac{df_n}{dx}\right).$$

Faisons, en second lieu,

$$y=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^\omega\varphi_n;$$

nous aurons

$$2\int\varphi_n\frac{df_n}{dx}dx=(x^2-1)\left(\varphi_n\frac{d^2f_n}{dx\,d\omega}-\frac{df_n}{d\omega}\frac{d\varphi_n}{dx}\right)-2\omega\varphi_n\frac{df_n}{d\omega}.$$

Remplaçons, dans le second membre de cette égalité, $\frac{d^2f_n}{dx\,d\omega}$ par sa valeur tirée de l'équation (2) et $\frac{d\varphi_n}{dx}$ par sa valeur tirée de l'équation (2)'; il viendra, toutes réductions faites,

$$(16)\qquad 2\int\varphi_n\frac{df_n}{dx}dx=\varphi_nf_n+\varphi_n\frac{df_{n+1}}{d\omega}-\varphi_{n+1}\frac{df_n}{d\omega},$$

d'où encore, en changeant ω en $-\omega$,

$$(16)'\qquad 2\int f_n\frac{d\varphi_n}{dx}dx=\varphi_nf_n-f_n\frac{d\varphi_{n+1}}{d\omega}+f_{n+1}\frac{d\varphi_n}{d\omega}.$$

On déduit de là l'identité suivante, où K désigne une quantité indépendante de x :

$$\varphi_n \frac{df_{n+1}}{d\omega} - \varphi_{n+1} \frac{df_n}{d\omega} + f_{n+1} \frac{d\varphi_n}{d\omega} - f_n \frac{d\varphi_{n+1}}{d\omega} = \mathrm{K}.$$