BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Remarques sur les équations différentielles linéaires du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 35-36
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__35_0>

Remarques sur les équations différentielles linéaires du second ordre; par M. LAGUERRE.

(Séance du 5 décembre 1879.)

1. En désignant par P, Q, R des fonctions données de x et par z et u des fonctions arbitraires de cette variable, posons

$$Pz'' + Qz' + Rz = Z$$

et

$$Pu'' + Qu' + Ru = U.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$S = e^{\int \frac{Q}{P} dx},$$

on déduit des équations précédentes

$$\begin{aligned}\frac{S(Zu - Uz)}{P} &= S(uz'' - zu'') + \frac{SQ}{P}(uz' - zu')\\ &= S(uz'' - zu'') + S'(uz' - zu'),\end{aligned}$$

d'où, en intégrant,

$$\text{(A)} \qquad \int \frac{S(Zu - Uz)\,dx}{P} = S(uz' - zu').$$

2. En particulier, si u désigne une solution de l'équation

$$\text{(1)} \qquad Py'' + Qy' + Ry = 0,$$

on a l'identité suivante :

$$\text{(B)} \qquad \int \frac{SZu\,dx}{P} = S(uz' - zu').$$

Soit v une solution quelconque de l'équation (1); α désignant un paramètre arbitraire contenu dans les fonctions P, Q, R (ce paramètre peut du reste être la variable indépendante x elle-même), si l'on pose

$$\frac{dv}{d\alpha} = z,$$

on voit que z satisfait à la relation

$$Pz'' + Qz' + Rz = -\left(\frac{dP}{d\alpha}v'' + \frac{dQ}{d\alpha}v' + \frac{dR}{d\alpha}v\right).$$

Si, dans l'équation (B), on remplace z par $\frac{dv}{d\alpha}$ et Z par sa valeur, il vient

$$\text{(C)}\qquad \int \frac{S}{P}\left(\frac{dP}{d\alpha}v'' + \frac{dQ}{d\alpha}v' + \frac{dR}{d\alpha}v\right)u\,dx = S\left(\frac{dv}{d\alpha}\frac{du}{dx} - u\frac{d^2v}{d\alpha\,dx}\right).$$

3. En désignant toujours par u et v deux solutions quelconques de l'équation (1), posons

$$z = uv;$$

il est aisé de voir que z satisfait à l'équation

$$Pz'' + Qz' + Rz = 2Pu'v' - Ruv;$$

l'équation (B) donne dans ce cas la relation suivante :

$$\text{(D)}\qquad \int \frac{S(2Pu'v' - Ruv)\,u\,dx}{P} = Su^2v'.$$

4. Il serait facile de multiplier le nombre de ces formules; je me contente ici de transcrire celles dont l'application est la plus fréquente, me réservant d'y renvoyer lorsque j'en aurai à faire usage dans les Communications que j'aurai occasion de présenter à la Société.