BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Observations sur la théorie des caractéristiques

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 31-34
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__31_0>

Observations sur la théorie des caractéristiques; par M. Halphen.

(Séance du 21 novembre 1879.)

Dans un Livre récent, intitulé *Kalkül der abzählenden Geometrie,* M. Schubert a consacré un Chapitre à la théorie des caractéristiques, non pas seulement pour les coniques, mais aussi pour diverses figures composées de points, de plans et de lignes droites. Je laisse de côté, quant à présent, la partie de ce Chapitre qui concerne les coniques, et je m'occupe ici des propositions qui se rapportent soit à la figure formée de plusieurs points en ligne droite, soit à la figure composée de plusieurs droites comprises dans un même plan et concourant en un même point. Ces propositions sont contenues dans les §§ **42** et **44** de l'Ouvrage cité (p. 307 et 323). Elles me paraissent inexactes. Je vais appuyer cette assertion sur deux exemples très simples.

1. Soit Γ la figure composée de n points $p_1, p_2, \ldots, p_n$ situés sur une même ligne droite g. Envisagée dans l'espace, la figure Γ est déterminée par $n+4$ conditions. Si on l'assujettit seulement à $n+3$ conditions, on définit par là un *système :* c'est l'ensemble des figures Γ qui satisfont à ces $n+3$ conditions. Suivant les notations de M. Schubert, désignons par Σ' un tel système, en même temps que nous désignerons par Σ une condition simple quelconque se rapportant à une figure Γ. D'après M. Schubert, *le nombre des figures* Γ *qui, faisant partie d'un système quelconque* Σ', *satisfont en même temps à une condition quelconque* Σ, *indépendante de ce système, est*

$$\beta g + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n,$$

les nombres $\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *ne dépendant que de la condition* Σ *et les nombres* $g, p_1, \ldots, p_n$ *ne dépendant que du système* Σ'. Ces derniers sont les *caractéristiques* du système Σ', et voici leurs définitions précises : g est le nombre des figures Γ, du système Σ', pour chacune desquelles la droite g rencontre une droite donnée; $p_m (m = 1, 2, \ldots, n)$ est le nombre des figures Γ, du système Σ', pour chacune desquelles le point p_m est dans un plan donné.

L'exemple que je vais envisager se rapporte au cas $n = 3$. Ainsi la figure Γ se compose de trois points p_1, p_2, p_3 en ligne droite. La droite qui les joint est désignée par g.

Je considère la condition Σ suivante. On donne un plan fixe Q. Soit q le point où g rencontre ce plan. Les quatre points p_1, p_2, p_3, q doivent former une division harmonique, dans laquelle p_1 sera le conjugué de q.

Il est aisé de trouver les nombres β, α_1, α_2, α_3 relatifs à cette condition Σ. A cet effet, j'applique le théorème ci-dessus, en prenant successivement divers systèmes très simples.

Soit Σ'_1 le système de figures Γ dans lequel p_2 et p_3 sont des points fixes. Les caractéristiques de ce système sont

$$g = 0, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0, \quad p_1 = 1.$$

Désignons par (Σ, Σ'_1) le nombre des figures du système Σ'_1 qui satisfont à la condition Σ. On a, d'après le théorème visé,

$$(\Sigma, \Sigma'_1) = \alpha_1.$$

D'ailleurs, il est visible *a priori* que (Σ, Σ'_1) est l'unité. Donc $\alpha_1 = 1$.

Soient, de même, Σ'_2, Σ'_3 les systèmes dans le premier desquels p_3, p_1 sont fixes, dans le second desquels p_1, p_2 sont fixes. On aura encore

$$(\Sigma, \Sigma'_2) = \alpha_2 = 1, \quad (\Sigma, \Sigma'_3) = \alpha_3 = 1.$$

Prenons enfin le système Σ'', dans lequel p_1 est un point fixe et p_2, p_3 restent sur deux droites fixes A_2, A_3 contenues dans un plan qui passe en p_1. Dans ce système, les caractéristiques sont

$$g = 1, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = p_3 = 1;$$

par suite,

$$(\Sigma, \Sigma'') = \alpha_2 + \alpha_3 + \beta = 2 + \beta.$$

Ici encore, (Σ, Σ'') se détermine aisément. Par rapport aux deux droites fixes A_2, A_3, et dans leur plan, le point p_1 a une polaire. Cette droite rencontre le plan Q en un point qui, d'après la condition Σ, doit appartenir à g. La droite g est alors celle qui joint p_1 à ce dernier point. Donc $(\Sigma, \Sigma'') = 1$; donc $\beta = -1$.

Les nombres β, α_1, α_2, α_3 étant trouvés, le théorème donne maintenant

$$(\Sigma, \Sigma') = p_1 + p_2 + p_3 - g \tag{1}$$

pour le nombre des figures Γ, d'un système Σ' quelconque, qui satisfont en même temps à la condition Σ ci-dessus définie.

J'envisage actuellement le système Σ' dans lequel p_1, p_2, p_3 restent respectivement sur des droites fixes B_1, B_2, B_3 situées dans un même plan et concourant en un même point, la droite g passant, en outre, par un point fixe r situé dans le plan des droites B_1, B_2, B_3. Les caractéristiques de ce système sont

$$g = 1, \quad p_1 = p_2 = p_3 = 1.$$

En conséquence, la formule (1) donne

$$(\Sigma, \Sigma') = 2.$$

Or, dans le plan des droites B, la droite B_1 a, par rapport aux droites B_2, B_3, une polaire qui rencontre le plan Q en un point. Ce dernier coïncide nécessairement avec q. La droite qr est donc la seule du système Σ' qui satisfasse à la condition Σ. Ainsi, le nombre (Σ', Σ), dans cet exemple, est *l'unité*, tandis que le théorème ci-dessus fournit le nombre *deux*. Par conséquent, *le théorème est en défaut quand on l'applique au système Σ' et à la condition Σ précédemment définis.*

2. Soit Δ la figure composée de n droites $g_1, g_2, \ldots, g_n$ situées dans un même plan e et passant par un même point p. Cette figure est déterminée par $n + 5$ conditions. L'ensemble des figures Δ, satisfaisant à $n + 4$ conditions communes, constitue un système. D'après M. Schubert, *le nombre des figures Δ qui, faisant partie d'un système quelconque Σ', satisfont en même temps à une condition quelconque Σ, indépendante de ce système, est*

$$\beta e + \gamma p + \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots + \alpha_n g_n,$$

les nombres $\beta, \gamma, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ne dépendant que de la condition Σ et les nombres $e, p, g_1, \ldots, g_n$ ne dépendant que du système Σ'. Ces derniers sont les *caractéristiques* de Σ', savoir :

e est le nombre des figures Δ, du système Σ', pour chacune desquelles le plan e passe par un point donné ;

p est le nombre des figures Δ, du système Σ', pour chacune desquelles le point p est dans un plan donné;

$g_m (m = 1, 2, \ldots, n)$ est le nombre des figures Δ, du système Σ', pour chacune desquelles la droite g_m rencontre une droite donnée.

Je prends encore ici le cas $n = 3$. Pour condition Σ, j'envisage la suivante. Soit h la droite qui joint le point p au point de rencontre du plan e avec une droite donnée. Cette droite h doit être la conjuguée harmonique de g_1 par rapport à g_2 et g_3.

Par des applications analogues à celles que j'ai exposées tout à l'heure, on trouve aisément, pour cette condition Σ,

$$\gamma = -1, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1.$$

Pour système Σ', je considère le suivant : les droites g_1, g_2, g_3 passent par trois points donnés en ligne droite, et le point p est assujetti à rester sur une droite donnée rencontrant celle qui joint les trois points fixes. Les caractéristiques sont

$$e = 0, \quad p = 1, \quad g_1 = g_2 = g_3 = 1.$$

Le théorème donne donc $(\Sigma, \Sigma') = 2$, tandis que le nombre véritable est $(\Sigma, \Sigma') = 1$. Ainsi, *le théorème concernant la figure* Δ *est en défaut quand on l'applique au système* Σ' *et à la condition* Σ *que je viens de définir.*

3. Je me borne à ces exemples, que j'ai choisis les plus simples possible, mais auxquels je pourrais sans peine en joindre beaucoup d'autres. Les deux théorèmes mentionnés sont exacts dans les cas seulement où le nombre n ne dépasse pas 2. J'ai déjà eu l'occasion de le montrer dans une Communication purement verbale faite à la Société dans la séance du 4 avril 1877, et qui est mentionnée au procès-verbal de cette séance (voir *Bulletin,* t. V, p. 75).