ED. LUCAS

Sur l'extension du théorème de Descartes

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 187-191
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__187_1>

Sur l'extension du théorème de Descartes; par M. Éd. Lucas.

(Séance du 2 avril 1880.)

M. Laguerre a donné, dernièrement, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* et dans les *Nouvelles Annales,* quelques considérations nouvelles et fort importantes, au point de vue pratique, pour la séparation des racines des équations algébriques; notre but est de présenter une démonstration élémentaire qui permet d'introduire dès maintenant dans l'enseignement le théorème de M. Laguerre.

1. Désignons par $f_m(x)$ un polynôme ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x,

$$f_m(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

et considérons les expressions

$$(1)\qquad \begin{cases} f_0(x) = A_0, \\ f_1(x) = A_0 x + A_1, \\ f_2(x) = A_0 x^2 + A_1 x + A_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m. \end{cases}$$

On calcule facilement les valeurs des polynômes $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)$ pour une valeur donnée de x, par voie récurrente, puisque l'on a

$$f_p(x) = x f_{p-1}(x) + A_p.$$

2. Les polynômes en x que nous venons de considérer sont obtenus dans le quotient du polynôme proposé par un binôme $x - a$; on a, en effet, l'identité

$$(2)\qquad \frac{f_m(x)}{x-a} = x^{m-1} f_0 + x^{m-2} f_1 + x^{m-3} f_2 + \ldots + f_{m-1} + \frac{f_m}{x-a},$$

dans laquelle $f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}, f_m$ désignent les résultats que l'on obtient en remplaçant x par a, dans les polynômes (1).

De même, on calcule facilement le quotient de $f(x)$ par le produit $(x-a)(x-b)$ au moyen de l'identité

$$\frac{f(x)}{x-a} - \frac{f(x)}{x-b} = \frac{(a-b) f(x)}{(x-a)(x-b)},$$

dans laquelle on suppose a et b inégaux.

On calculerait de même le quotient de $f(x)$ par

$$(x-a)(x-b)(x-c)$$

pour des valeurs inégales entre elles de a, b, c au moyen de l'identité

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)} - \frac{f(x)}{(x-a)(x-c)} = \frac{(b-c)f(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)},$$

et ainsi de suite.

3. *Lemme de Segner généralisé.* — Le lemme de Segner sert de base à la démonstration du théorème de Descartes; on le généralise de la façon suivante. Si $f(x)$ désigne l'expression

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L + \frac{M}{x-a},$$

dans laquelle M désigne une constante positive ou négative, le nombre des variations contenues dans le produit $(x-b)f(x)$, mis sous la forme

$$Ax^{m+1} + B'x^m + C'x^{m-1} + \ldots + K'x^2 + L'x + M' + \frac{N'}{x-a},$$

surpasse d'une unité au moins et toujours d'un nombre impair le nombre des variations de la suite

$$A,\ B,\ C,\ \ldots,\ K,\ L,\ M$$

si l'on suppose $b > a$ et b positif.

En effet, la suite des coefficients de $f(x)$

$$A,\ B,\ C,\ \ldots,\ K,\ L,\ M$$

devient, après la multiplication,

$$A,\ B - bA,\ C - bB,\ \ldots,\ L - bK,\ M - bL,\ (a-b)M.$$

Le dernier terme a le même signe que $-bM$, puisque l'on suppose $a < b$, de sorte que la démonstration du lemme généralisé est absolument semblable à la démonstration ordinaire donnée dans les Cours.

4. Théorème de M. Laguerre. — *Dans une équation algébrique $f_m(x) = 0$, le nombre des racines positives plus grandes que a*

ne peut surpasser le nombre des variations de la suite

$$(3) \qquad f_0(a),\ f_1(a),\ f_2(a),\ \ldots,\ f_m(a),$$

et, quand il est moindre, la différence est un nombre pair.

On démontre ce théorème de la même manière que le théorème de Descartes, en mettant préalablement $f_m(x)$ sous la forme (2). En particulier, pour $a = 0$, on retrouve le théorème de Descartes.

Remarque I. — Si la suite des fonctions (3) ne présente que des permanences, le nombre a est une limite supérieure des racines positives.

Remarque II. — Si dans l'équation $f_m(x) = 0$ on remplace x par $\frac{1}{x}$, on obtiendra une limite supérieure du nombre des racines de l'équation $f_m(x) = 0$ comprises entre 0 et a en appliquant le théorème de M. Laguerre à l'équation $f_m\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, pour la valeur $x = \frac{1}{a}$.

Exemple I. — Soit l'équation

$$f_m(x) = x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5 = 0,$$

considérée par M. Petersen et par M. Laguerre.

Pour $x = 1$, on a la suite

$$1,\ -4,\ -20,\ -8,\ -17,\ -22;$$

donc l'équation a une seule racine réelle plus grande que l'unité. En appliquant le procédé à la transformée en $\frac{1}{x}$, on n'a que des permanences; ainsi l'équation proposée n'a qu'une seule racine positive.

Exemple II. — Soit l'équation

$$x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0,$$

considérée dans le *Traité d'Algèbre supérieure* de M. Serret (p. 313). La substitution $x = 1$, par le commencement ou par la fin, dans le premier membre, fait voir qu'il n'y a pas de racines réelles supérieures à l'unité et qu'il y en a deux au plus entre o et 1 ; mais l'équation en $\frac{1}{x}$ s'écrit

$$[x^5 + x(x+1)(x-1)](x-1) + 1 = 0,$$

et ne peut avoir de racine plus grande que 1 ; donc la proposée n'a pas de racines positives. Dans la transformée en $-x$,

$$x^6 - x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

la substitution de $x = 1$ par le commencement ou par la fin montre qu'il n'y a pas de racines plus petites que 1 et qu'il y en a deux au plus plus grandes que 1 ; mais, en l'écrivant sous la forme

$$(x^5 - x^3)(x-1) + x^2 + x + 1 = 0,$$

on voit qu'il n'y a pas de racines plus grandes que 1; donc la proposée a toutes ses racines imaginaires.