Bulletin de la S. M. F.

G. Humbert

Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 124-128
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__124_1>

Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme; par M. Humbert.

(Séance du 19 mars 1880.)

I. M. Laguerre a montré, en développant $\log(x-z)$, la liaison étroite de cette question avec la théorie des fractions continues algébriques; il est facile de généraliser les résultats qu'il a obtenus; au lieu du logarithme, nous considérerons les fonctions ainsi définies.

Soient

$$\Delta(x) = Ax^2 + Bx + C = A(x-x_0)(x-x_1)$$

et une fonction $K(x)$ satisfaisant à la relation

$$\frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{Dx+E}{Ax^2+Bx+C} = \frac{\mu_0}{x-x_0} + \frac{\mu_1}{x-x_1},$$

$$K = (x-x_0)^{\mu_0}(x-x_1)^{\mu_1}.$$

Proposons-nous de développer la fonction

$$\int \frac{\Delta(x)\,dx}{K(x)(x-z)}$$

suivant les puissances croissantes de $\Delta(z)$.

Cette intégrale indéfinie est une fonction de x et de z; elle se développera de la manière suivante :

$$\int \frac{\Delta(x)\,dx}{K(x)(x-z)} = \Sigma(U_m + V_m z)\Delta^m(z).$$

Prenons les dérivées des deux membres par rapport à x :

$$\frac{\Delta(x)}{K(x)(x-z)} = \Sigma(U'_m + V'_m z)\Delta^m(z),$$

$$\frac{\Delta(x)}{K(x)}\,\frac{\Delta(x)-\Delta(z)}{x-z}\,\frac{1}{\Delta(x)-\Delta(z)} = \Sigma(U'_m + V'_m z)\,\Delta^m(z),$$

ou

$$V'_m = \frac{A}{K(x)\Delta^m(x)},$$

$$U'_m = \frac{Ax+B}{K(x)\Delta^m(x)}.$$

Ces expressions sont susceptibles d'une interprétation remarquable.

Considérons, en effet, l'équation différentielle

$$\text{(E)}\quad (Ax^2 + Bx + C)y'' + (Dx + E)y' = [Am(m-1) + Dm]y.$$

Une des solutions est un polynôme entier de degré m que j'appellerai P_m; une seconde solution, y_1, sera

$$y_1 = P_m(x)\int\frac{dx}{K(x)P_m^2(x)} = P_m(x)\int\frac{dx}{(x-x_0)^{\mu_0}(x-x_1)^{\mu_1}P_m^2(x)};$$

elle commence par un terme en $\frac{1}{x^{\mu_0+\mu_1+m-1}}$.

Si nous prenons les dérivées d'ordre m des deux membres de l'équation (E), on a

$$(Ax^2 + Bx + C)y^{(m+2)} + [m(2Ax+B) + Dx + E]y^{(m+1)} = 0,$$

ce qui donne

$$y_1^{(m+1)} = \frac{1}{K\Delta^m}.$$

On a donc

$$V'_m = y_1^{(m+1)},$$

$$V_m = y_1^{(m)} + \text{const.}$$

Or, en appliquant la formule de Jacobi à l'intégrale

$$\int\frac{\Delta(x)\,dx}{K(x)(x-z)},$$

on voit aisément que V_m et la dérivée d'ordre m de y_1 commencent tous deux par des termes en $\frac{1}{x^{\mu_0+\mu_1+2m-1}}$.

Donc

$$V_m = y_1^{(m)};$$

de même

$$U'_m = (Ax+B)y_1^{(m+1)},$$
$$U_m = (Ax+B)y_1^{(m)} - Ay_1^{(m-1)}.$$

Ces expressions sont générales; mais, dans le cas où μ_0 et μ_1 sont positifs, y_1 a une forme remarquable.

On a, en effet, d'après une formule de Jacobi modifiée quant à la notation,

$$\frac{K(x)}{\Delta(x)} y_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} \frac{P_m(z)}{x-z} dz$$

ou

$$y_1 = \frac{\Delta(x)}{K(x)} \left[P_m(x) \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)\,dz}{\Delta(z)(x-z)} + \prod_{m-1}(x) \right].$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Dans le développement*

$$\int \frac{\Delta(x)}{K(x)} \frac{dx}{x-z} = \Sigma (U_m + V_m z) \Delta^m(z),$$

V_m *est égal à la dérivée d'ordre* m *de l'expression*

$$\frac{\Delta(x)}{K(x)} \left[P_m(x) \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} \frac{dz}{x-z} + \prod_{m-1} \right],$$

P_m *et* Π_{m-1} *étant les polynômes de degrés* m *et* $m-1$ *qui rendent cette expression du plus haut degré possible en* $\left(\frac{1}{x}\right)$, *pourvu toutefois que l'intégrale prise entre* x_0 *et* x_1 *ait un sens.*

Cette dernière hypothèse revient, en effet, à $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > 0$.

Remarque. — Les polynômes $P_m(x)$ sont, dans ce cas, les dénominateurs des réduites de $\int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} \frac{dz}{x-z}$.

Les formules précédentes comprennent, comme cas particulier, le logarithme; il suffit de prendre $K = \Delta$.

II. — Les résultats qui viennent d'être exposés s'appliquent évidemment au cas où Δ est du premier degré.

Par exemple, prenons $\Delta = x$:

$$\frac{K'}{K} = \frac{x+1}{x} \quad \text{ou} \quad K = xe^x.$$

L'équation

$$xy'' + (x+1)y' = my$$

est celle que nous avons appelée E.

Soit y_1 celle de ses solutions qui ne renferme pas de termes entiers en x et dont M. Laguerre a donné plusieurs expressions (*Bulletin de la Société mathématique*, t. VII, p. 74-75).

On aura

$$\int_\infty^x \frac{e^{-x}}{x-z}\,dx = \Sigma V_m(x) z^m$$

et

$$V_m(x) = D_x^{(m)} y_1.$$

La fonction de z, $\int_\infty^x \frac{e^{-x}}{x-z}\,dx$, est évidemment uniforme, et l'intégrale a un sens si z n'est pas compris entre x et ∞. Pour qu'elle soit développable en série convergente suivant les puissances croissantes de z, il faut et il suffit qu'elle soit holomorphe dans un cercle décrit de l'origine; on pourra toujours trouver un pareil cercle si x est plus grand que zéro.

Supposons donc

$$x > 0 \quad \text{et} \quad z < x.$$

Posons dans l'intégrale

$$x - z = u;$$

on aura

$$\int^{x-z} \frac{e^{-z-u}}{u}\,du = \Sigma V_m(x) z^m.$$

Faisons $x - z = y$:

$$e^{+y-x} \int_\infty^y \frac{e^{-u}}{u}\,du = \Sigma V_m(x)(x-y)^m$$

ou enfin

$$e^y \int_\infty^y \frac{e^{-y}}{y}\, dy = \Sigma e^x \mathrm{V}_m(x)(x-y)^m.$$

Avec les conditions $x > 0$, $y > 0$, la série du second membre est convergente.

Nous avons ainsi le développement de l'intégrale *rectiligne*

$$e^y \int_\infty^y \frac{e^{-y}}{y}\, dy,$$

qu'a étudiée M. Laguerre, suivant les puissances de $(y - x)$, et ce théorème :

Théorème. — *Le coefficient de $(x - y)^m$ est égal à e^x multiplie par la dérivée d'ordre m de l'expression*

$$\varphi_m(x)e^{-x} - f_m(x) \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx,$$

$\varphi_m(x)$ et $f_m(x)$ étant les polynômes de degrés $m - 1$ et m qui rendent cette expression de l'ordre le plus élevé possible en $\frac{1}{x}$.

Je me propose, dans une prochaine Communication, de généraliser ces résultats en prenant pour Δ un polynôme de degré quelconque.