LAGUERRE

Sur la fonction exponentielle

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 11-18
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__11_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur la fonction exponentielle; par M. LAGUERRE.

(Séance du 7 novembre 1879.)

1. Soient $a, b, c, \ldots, l, m$ quantités arbitraires et $F, F_1, F_2, \ldots, F_{m-1}$, m polynômes entiers en x. Si l'on désigne respectivement par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ le degré de ces polynômes et si l'on pose, pour abréger,

$$\mu = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda,$$

on voit que, dans l'expression

$$V = Fe^{ax} + F_1 e^{bx} + F_2 e^{cx} + \ldots + F_{m-1} e^{lx},$$

figurent les $\mu + m$ coefficients des polynômes $F, F_1, \ldots, F_{m-1}$.

En donnant à l'un d'eux une valeur arbitraire, on peut encore disposer des $(\mu + m - 1)$ autres coefficients de façon à annuler, dans le développement de V suivant les puissances croissantes de x, les coefficients de

$$x^0, \; x^1, \; x^2, \; \ldots, \; x^{\mu+m-2}.$$

Les polynômes $F, F_1, \ldots, F_{m-1}$ étant ainsi déterminés, le développement de V commencera par un terme de l'ordre de $x^{\mu+m-1}$.

Dans une Note publiée dans le *Journal de M. Borchardt* (1),

(1) *Lettre de M. Hermite à M. Borchardt* (*Journal de M. Borchardt*, t. 76).

M. Hermite a donné une méthode très simple et très élégante pour déterminer les valeurs de ces polynômes. Depuis, dans le cas particulier où tous les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ sont égaux à un même nombre n (¹), j'ai rattaché la recherche de l'expression V au développement de e^{zx} suivant les puissances croissantes du polynôme

$$f(z) = (z-a)(z-b)(z-c)\ldots(z-l),$$

et, en posant

$$f(z) = z^m + p z^{m-1} + q z^{m-2} + \ldots + sz + t,$$

j'ai montré que V était une solution de l'équation différentielle du $m^{\text{ième}}$ ordre

$$x\left(\frac{d^m y}{dx^m} + p\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + q\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + s\frac{dy}{ds} + ty\right)$$
$$- n\left[m\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + (m-1)p\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + (m-2)q\frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} + \ldots + sy\right] = 0.$$

Si l'on représente, pour un instant, par

$$Dy,\quad D^2y,\quad D^3y,\quad \ldots$$

les dérivées successives de y, l'équation précédente peut se mettre sous la forme symbolique qui suit :

$$xf(D)y - f'(D)y = 0.$$

2. Dans le cas plus général où les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont différents, il est aussi facile de former l'équation différentielle à laquelle satisfait V.

Si l'on pose, pour abréger,

$$f_a = \frac{f}{x-a},\quad f_b = \frac{f}{x-b},\quad \ldots,\quad f_l = \frac{f}{x-l},$$

cette équation différentielle peut s'écrire sous la forme symbolique

$$(1)\qquad xf(D)y - [\alpha f_a(D) + \beta f_b(D) + \ldots + \lambda f_l(D)]y = 0,$$

et on le démontrerait aisément en suivant la voie indiquée par M. Hermite dans la Note que j'ai citée ci-dessus.

(¹) *Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme* (*Journal de M. Borchardt*, t. 88).

3. En particulier, si $m = 3$, l'équation (1) peut s'écrire

$$\begin{aligned} x[y''' - (a+b+c)y'' + (ab+bc+ca)y' - abcy] \\ - \{(\alpha+\beta+\gamma)y'' - [\alpha(b+c) + \beta(c+a) + \gamma(a+b)]y' \\ + (\alpha bc + \beta ca + \gamma ab)y\} = 0. \end{aligned}$$

En supposant, ce qu'il est toujours permis de faire sans nuire à la généralité du problème, que

$$a = 0,$$

l'équation précédente devient

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & x[y''' - (b+c)y'' + bcy'] \\ & - \{(\alpha+\beta+\gamma)y'' - [\alpha(b+c) + c\beta + a\gamma]y' + \alpha bcy\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Je me propose, dans ce qui suit, de démontrer directement cette équation.

4. Soient F, F_1 et F_2 trois polynômes en x dont le degré soit respectivement marqué par les nombres α, β et γ; on peut disposer des coefficients de ces polynômes de telle sorte que le développement de l'expression

$$V = F + F_1 e^{bx} + F_2 e^{cx}$$

commence par un terme de l'ordre de $x^{\alpha+\beta+\gamma+2}$.

On a donc

$$F + F_1 e^{bx} + F_2 e^{cx} = (x^{\alpha+\beta+\gamma+2}),$$

ou, en faisant, pour abréger, $\alpha + \beta + \gamma = \mu$,

$$(3)\qquad F + F_1 e^{bx} + F_2 e^{cx} = (x^{\mu+2}) \quad [1].$$

En formant successivement la première et la seconde dérivée de la relation (3), il vient

$$(4)\qquad F' + e^{bx}(F'_1 + bF_1) + e^{cx}(F'_2 + cF_2) = (x^{\mu+1})$$

et

$$(5)\quad F'' + e^{bx}(F''_1 + 2bF'_1 + b^2F_1) + e^{cx}(F''_2 + 2cF'_2 + c^2F_2) = (x^{\mu}).$$

---

[1] Ici, comme dans tout ce qui suit, je désigne généralement, indépendamment de la nature des coefficients, par (x^p) une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et commençant par un terme en x^p.

En résolvant les équations (3), (4) et (5), on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} F & F_1 & F_2 \\ F' & F'_1 + bF_1 & F'_2 + cF_2 \\ F'' & F''_1 + 2bF'_1 + b^2F_1 & F''_2 + 2cF'_2 + c^2F_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (x^{\mu+2}) & F_1 & F_2 \\ (x^{\mu+1}) & F'_1 + bF_1 & F'_2 + cF_2 \\ (x^{\mu}) & F''_1 + 2bF'_1 + b^2F_1 & F''_2 + 2cF'_2 + c^2F_2 \end{vmatrix},$$

d'où il résulte que Δ est divisible par x^μ, et, comme d'ailleurs cette expression est précisément du degré μ, on a

$$\Delta = Mx^\mu,$$

M désignant une quantité constante.

5. Je pose, pour abréger,

$$\Delta = Mx^\mu = PF'' - QF' + RF,$$

puis

$$F_1 e^{bx} = u, \quad F_2 e^{cx} = v,$$

et enfin

$$uv' - vu' = w, \quad u'v'' - v'u'' = \omega.$$

Comme on a évidemment

$$\Delta = \begin{vmatrix} F & e^{-bx}u & e^{-cx}v \\ F' & e^{-bx}u' & e^{-cx}v' \\ F'' & e^{-bx}u'' & e^{-cx}v'' \end{vmatrix},$$

on en déduit

$$P = e^{-(b+c)}w, \quad Q = e^{-(b+c)}w' \quad \text{et} \quad R = e^{-(b+c)}\omega.$$

Considérons maintenant l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} y & e^{-bx}u & e^{-cx}v \\ y' & e^{-bx}u' & e^{-cx}v' \\ y'' & e^{-bx}u'' & e^{-cx}v'' \end{vmatrix} = Mx^\mu,$$

que l'on peut écrire

$$(6) \qquad Py'' - Qy' + Ry = Mx^\mu.$$

Cette équation est satisfaite quand on y fait $y = F$; la même équation est également satisfaite quand on y fait $y=u$ ou $y=v$, pourvu que l'on y remplace la constante M par zéro.

Si donc on élimine, par différentiation, la constante M de l'équation (6), l'équation que l'on obtient

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}xy''' + (\mathrm{P}x' - \mathrm{Q}x - 3n\mathrm{P})y'' \\ &\quad + (\mathrm{R}x - \mathrm{Q}'x + 3n\mathrm{Q})y' + (\mathrm{R}'x - 3n\mathrm{R})y = 0 \end{aligned}$$

a pour solutions

$$y = \mathrm{F}, \quad y = u \quad \text{et} \quad y = v;$$

c'est, par suite, l'équation à laquelle satisfait l'expression V. En y remplaçant P, Q et R par leurs valeurs données plus haut, elle prend la forme suivante :

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\omega x y''' - [(b+c)x + \mu]\omega y'' \\ &\quad + [x\omega + x(b+c)\omega' - x\omega'' + \mu\omega']y' \\ &\qquad + [x\omega' - (b+c)x\omega - \mu\omega]y = 0. \end{aligned} \right.$$

6. Pour simplifier cette équation, je remarque que l'équation (6) a une solution entière, à savoir le polynôme F. Il est facile d'ailleurs d'intégrer cette équation, puisque l'équation obtenue en retranchant le second membre,

$$\mathrm{P}y'' - \mathrm{Q}y' + \mathrm{R}y = 0$$

a pour solutions

$$y = u \quad \text{et} \quad y = v.$$

En employant donc la méthode connue de la variation des constantes arbitraires, je poserai

$$y = \mathrm{A}u + \mathrm{B}v,$$

puis

$$\mathrm{A}'u + \mathrm{B}'v = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{A}'u' + \mathrm{B}'v' = \frac{\mathrm{M}x^{\mu}}{\mathrm{P}}.$$

On en déduit

$$\mathrm{A}' = \frac{\mathrm{M}x^{\mu}}{\mathrm{P}^2} e^{-bx} \mathrm{F}_2 dx, \quad \mathrm{B}' = -\frac{\mathrm{M}x^{\mu}}{\mathrm{P}^2} e^{-cx} \mathrm{F}_1 dx$$

et

$$y = \mathrm{M}\mathrm{F}_1 e^{bx} \int \frac{x^{\mu}}{\mathrm{P}^2} e^{-bx} \mathrm{F}_2 dx - \mathrm{M}\mathrm{F}_2 e^{cx} \int \frac{x^{\mu}}{\mathrm{P}^2} e^{-cx} \mathrm{F}_1 dx.$$

Comme l'une des valeurs de y est le polynôme F, on voit que l'intégrale

$$\int \frac{x^\mu}{P^2} e^{-bx} F_2 dx$$

ne doit renfermer d'autre transcendante que la fonction e^{-bx}.

En désignant par λ une racine quelconque de l'équation $P = 0$, posons

$$\frac{x^\mu F_2}{P^2} = E + \sum \frac{p}{x - \lambda} + \sum \frac{q}{(x-\lambda)^2};$$

l'intégrale précédente devient

$$\int e^{-bx} E dx + \int e^{-bx} \sum \frac{p}{x-\lambda} dx + \int e^{-bx} \sum \frac{q}{(x-\lambda)^2} dx,$$

ou, en intégrant par parties,

$$\int e^{-bx} E dx - \sum \frac{e^{-bx} q}{x-\lambda} + \int e^{-bx} \sum \frac{p - bq}{x-\lambda} dx.$$

Cette expression ne devant renfermer d'autre transcendante que e^{-bx}, on doit avoir, pour toutes les racines de l'équation $P(\lambda) = 0$, la relation

$$b = \frac{p}{q};$$

or un calcul facile donne

$$\frac{p}{q} = \frac{\mu}{\lambda} + \frac{F'_2(\lambda)}{F_2(\lambda)} - \frac{P''(\lambda)}{P'(\lambda)}.$$

On a donc, quelle que soit la racine considérée de l'équation $P(\lambda) = 0$,

$$\frac{\mu}{\lambda} + \frac{F'_2(\lambda)}{F_2(\lambda)} - \frac{P''(\lambda)}{P'(\lambda)} = b,$$

d'où l'identité suivante, où G désigne un polynôme du degré γ :

$$(7) \qquad xF'_2 P' + \mu F_2 P' - xF_2 P'' - bxF_2 P' + GP = 0.$$

7. Pour déterminer le polynôme G, je remarque qu'en négligeant les multiples de F_2 on a, par la définition même du polynôme P,

$$P \equiv F_1 F'_2$$

et

$$P' \equiv F_1 F''_2 + (c - b) F_1 F'_2.$$

La relation donne d'ailleurs

$$x F'_2 P' + GP \equiv o,$$

d'où, en remplaçant P et P' par leurs valeurs congrues suivant le module F_2,

$$x F_1 F'_2 F''_2 + (c - b) x F_1 F'^2_2 + G F_1 F'_2 \equiv o,$$

puis, en divisant par $F_1 F'_2$,

$$G \equiv (b - c) x F'_2 - x F''_2$$

et enfin

$$G = m F_2 + (b - c) x F'_2 - x F''_2,$$

m désignant une quantité constante.

En portant cette valeur de G dans l'équation (7), elle devient

$$(8)\quad x F_2 P'' + (b x F_2 - x F'_2 - \mu F_2) P' - [m F_2 + (b - c) x F'_2 - x F''_2] P = o;$$

P étant du degré $(\beta + \gamma)$, on trouve facilement, en égalant à zéro le coefficient du terme le plus élevé dans la relation précédente,

$$b(\beta + \gamma) - m - \gamma(b - c) = o, \quad \text{d'où} \quad m = b\beta + c\gamma.$$

8. En employant maintenant les relations

$$P = e^{-(b+c)} w \quad \text{et} \quad F_2 = e^{-cx} v,$$

j'introduis les fonctions w et v dans l'équation (8).

En effectuant les calculs, on obtient la relation

$$v x w'' - [(b + c) v x + \mu v + x v'] w' + [b c x v + \mu (b + c) v - m v + x v''] w = o,$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$x w'' - [(b + c) x + \mu] w' + [b c x + \mu (b + c) - m] w + \frac{x}{v}(v'' w - v' w').$$

Je remarque maintenant que, w étant égal à $uv' - vu'$, l'expression $\dfrac{v'' w - v' w'}{v}$ a pour valeur

$$v' u'' - u' v'' = - \omega.$$

On a donc identiquement

$$x(w'' - \omega) - [(b+c)x + \mu]w' + [bcx + \mu(b+c) - m]w = 0.$$

Tirons ω de cette relation et portons sa valeur dans l'équation (A); w, w' et w'' disparaîtront, et l'on obtiendra une équation de la forme

$$xy''' - [(b+c)x + \mu]y'' + [bcx + \mu(b+c) - m]y' + \mathrm{H}y = 0.$$

On déterminera H en remarquant que, l'équation précédente ayant pour solution le polynôme entier F qui est du degré α, H est une constante, et que le coefficient de x^α dans le premier membre est

$$\mathrm{H} + \alpha bc;$$

on a donc

$$\mathrm{H} = -\alpha bc.$$

9. Si maintenant on remplace respectivement μ et m par $\alpha + \beta + \gamma$ et $b\beta + c\gamma$, l'équation devient

$$\begin{aligned} &xy''' - [(b+c)x + \alpha + \beta + \gamma]y'' \\ &\quad + [bcx + \alpha(b+c) + c\beta + b\gamma]y' - \alpha bcy = 0, \end{aligned}$$

et on peut la mettre sous la forme que j'ai mentionnée plus haut :

$$\begin{aligned} &x[y''' - (b+c)y'' + bcy'] \\ &\quad - \{(\alpha+\beta+\gamma)y'' - [\alpha(b+c) + c\beta + b\gamma]y' + \alpha bcy\} = 0. \end{aligned}$$