BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RODET

Sur une méthode d'approximation des racines carrées connue dans l'Inde antérieurement à la conquête d'Alexandre

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 98-102
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__98_1>

Sur une méthode d'approximation des racines carrées, connue dans l'Inde antérieurement à la conquête d'Alexandre; par M. L. Rodet.

(Séance du 28 mars 1879.)

L'auteur persan Hassan ben al-Hossein al-Hakâk al-Morouzi (c'est-à-dire natif de Merv en Khorassan), dans un Traité d'Arithmétique qu'il a composé en l'an 613 de l'hégire ou 1216 de notre ère « pour répondre aux demandes de ses amis », donne le procédé suivant pour obtenir une approximation d'une *racine carrée sourde.* Lorsqu'on a, par le moyen connu, obtenu la racine cherchée à une unité près *par défaut,* « on divise le reste de l'opération par le double de la racine trouvée *plus un,* et la racine se compose de la partie entière et de cette fraction ». Ainsi

$$\sqrt{12} = 3\frac{3}{7}, \quad \sqrt{145} = 12\frac{1}{25}.$$

Ce procédé n'est pas difficile à justifier; en effet, si nous désignons par N le nombre proposé, par a sa racine à une unité près, et par r le reste de l'opération, de telle sorte que $N = a^2 + r$; si, de plus, nous appelons ε le complément de la racine, on a

$$r = (2a + \varepsilon)\varepsilon \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \frac{r}{2a + \varepsilon};$$

comme toujours $\varepsilon < 1$, on aura une approximation par défaut de sa valeur en le remplaçant par 1 au dénominateur de la fraction, c'est-à-dire en posant

$$\varepsilon_1 = \frac{r}{2a + 1}.$$

C'est la première fois que j'ai rencontré cette méthode d'approximation chez un auteur oriental, et, bien que je l'eusse trouvée assez remarquable pour l'époque où il vivait, je n'y aurais probablement prêté qu'une médiocre attention si je n'avais été amené à penser que ce procédé devait avoir été pratiqué couramment dans l'Inde, et même dès une époque très-reculée.

Al-Morouzi ayant donné $\sqrt{12} = 3\frac{3}{7}$, je fus naturellement amené à voir que, dans ce système, $\sqrt{10} = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$, c'est-à-dire la valeur donnée par Archimède pour le nombre π, seule valeur en usage pendant longtemps chez les Grecs : c'est en effet la seule dont se sert Héron le Jeune dans son Traité des surfaces et des volumes.

Mais, puisque $\frac{22}{7} = \sqrt{10}$, nous comprenons maintenant pourquoi l'astronome indien Brahmagupta enseignait à ses disciples (*voir* traduction de Colebrooke, n° 40, deuxième partie de la règle) que « la racine de 10 fois le carré du diamètre est la longueur de la circonférence; la racine de 10 fois le demi-diamètre (rayon), multipliée par ce demi-diamètre lui-même, est l'aire du cercle ». Dans la première partie de cette règle, il faisait multiplier le diamètre dans le premier cas, le carré du rayon dans le second cas, par 3, et donnait cette évaluation comme « usuelle » ou « vulgaire » (*vyâvahârika*); la seconde, qui fait $\pi = \sqrt{10}$, est, par opposition, appelée *sûxma,* « fine, subtile », et peut-être « raffinée ». On s'était demandé, et moi-même après bien d'autres, où Brahmagupta avait été chercher cette valeur de π, qu'il regardait comme pour ainsi dire exacte. L'écrivain persan que j'ai cité nous en a donné l'explication. Seulement $\pi = \frac{22}{7}$ est une approximation *par excès;* $\sqrt{10} = \frac{22}{7}$ est une approximation *par défaut*. Peut-être Brahmagupta, dans son enseignement oral, savait-il faire faire cette distinction à ses élèves.

Puisque l'exemple emprunté à Brahmagupta me donnait lieu de penser que les Indiens avaient connu et pratiqué le mode d'approximation des racines carrées dont je parle, il m'est venu à l'idée d'étudier à ce point de vue une valeur de $\sqrt{2}$ donnée dans *les Préceptes du cordeau* de Baudhâyana, ouvrage curieux, composé probablement au IV^e siècle avant notre ère, et qui contient les règles que doivent observer les brahmanes pour construire leurs autels. Cette valeur de $\sqrt{2}$, dont l'interprétation m'avait également beaucoup préoccupé, est

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34}.$$

Cette forme de *série* m'avait surtout paru originale.

Or, si nous appliquons à $\sqrt{2}$ la méthode en question, nous aurons à faire

$$N = 2, \quad a = 1, \quad r = 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

Le premier terme fractionnaire de la série de notre brahmane est donc bien obtenu par la méthode du Persan; $1 + \frac{1}{3}$ est une valeur approchée *par défaut* de la racine cherchée.

Continuons l'opération : il nous faut calculer

$$r' = r - (2a + \varepsilon_1)\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{r'}{2(a+\varepsilon_1) + \varepsilon_2},$$

ce qui nous donne

$$r' = 1 - \left(2 + \frac{1}{3}\right)\frac{1}{3} = 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2}{9} : \left[2\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \varepsilon_2\right] = \frac{2}{9} : \left(\frac{8}{3} + \varepsilon_2\right).$$

Or notre deuxième terme est

$$\frac{1}{3.4} = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8},$$

et l'auteur a, cette fois, négligé ε_2 au dénominateur de sa fraction diviseur et obtenu une approximation *par excès* de $\sqrt{2}$ dans la série

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4}.$$

Si nous poursuivons encore l'opération, nous verrons que la quantité à retrancher de $r' = \frac{2}{9}$ pour avoir r'' est $\frac{33}{144}$. Or $\frac{2}{9} = \frac{32}{144}$; par suite, $r'' = -\frac{1}{144}$.

Je donne ce résultat sous cette forme négative, parce que j'ai fait voir autre part que les Indiens ont eu de très-bonne heure la notion des *nombres négatifs* et qu'ils ne se préoccupaient pas, dans leurs calculs, du signe du résultat.

D'autre part, le double de la nouvelle racine étant $\frac{34}{12}$, nous aurons

$$\varepsilon_3 = \left(-\frac{1}{144}\right) : \frac{34}{12} = -\frac{1}{3.4.34}.$$

Et remarquons que, ce terme correctif étant trop grand en valeur absolue, l'expression

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34}$$

est de nouveau approchée *par défaut*.

Rien n'empêcherait de continuer le calcul, et rien ne dit que, lorsqu'ils en ont eu besoin, les auteurs de cette série de quatre termes n'aient su poursuivre l'opération.

Nous pouvons donc conclure de là qu'à l'époque où vivait Baudhâyana, c'est-à-dire à peu près au IV[e] siècle avant notre ère, on savait exprimer la valeur d'une racine carrée sourde (ou irrationnelle, comme nous persistons à vouloir dire) au moyen d'une série approchée alternativement par excès et par défaut; que le moyen d'obtenir le premier terme de cette série était de diviser le reste de l'opération qui avait fourni la racine à une unité près par le double de cette racine augmenté d'*un*. Les termes suivants, alternativement positifs et négatifs, s'obtenaient par un procédé qui n'est autre que celui que nous connaissons aujourd'hui sous le nom de *méthode d'approximation de Newton*.

J'ajouterai, pour terminer, qu'Al-Mourouzi applique son même procédé (borné au premier terme de la série) aux racines cubiques. Ici $\varepsilon = \frac{r}{3a^2 + 3a\varepsilon + \varepsilon^2}$; il y fait encore $\varepsilon = 1$ et a $\varepsilon_1 = \frac{r}{3a^2 + 3a + 1}$. Comme exemple numérique, il donne

$$\sqrt[3]{1748} = 12 \tfrac{20}{469}.$$

J'ignore, du reste, si l'on rencontrerait chez les auteurs indiens des exemples d'application de ce procédé, si, comme pour la racine carrée, ils continuaient à développer une série, et si, comme dans la méthode de Newton, les termes suivants de la série seraient de la forme

$$\varepsilon_n = \frac{r_n}{3a^3_{n-1}}.$$