BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Sur l'équation différentielle des coniques

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 83-85
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__83_1>

Sur l'équation différentielle des coniques; par M. HALPHEN.

(Séance du 13 février 1879.)

Dans une Note insérée au Tome IV de ce *Bulletin,* j'ai indiqué un moyen de former immédiatement l'équation différentielle du cinquième ordre des coniques dans le plan. Je m'y fondais sur cette propriété, facile à reconnaître *a priori,* que l'équation ne doit contenir ni la variable indépendante, ni la fonction, ni sa dérivée première. Voici maintenant un nouveau procédé pour parvenir très-rapidement aussi à cette même équation. Soit

$$y = ax + b + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$$

l'équation d'une conique. Par deux dérivations, on obtient

$$y'' = (AC - B^2)(Ax^2 + 2Bx + C)^{-\frac{3}{2}}.$$

On en peut conclure que y'', élevé à la puissance $-\frac{2}{3}$, est un polynôme du second degré arbitraire. Par suite, l'équation cherchée est la suivante :

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0,$$

ou, développée,

$$(1)\qquad 9y''^2y^{\text{v}} - 45y''y'''y^{\text{iv}} + 40y'''^3 = 0.$$

Remarquons, en passant, que l'équation $\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' = 0$ serait l'équation différentielle des paraboles.

L'intégration de l'équation (1) n'est pas sans intérêt; on y trouve l'application de plusieurs procédés d'abaissement classiques. Si l'on prend y'' pour variable et y''' pour fonction, on obtient la transformée

$$y'' = \xi, \quad y''' = \eta, \quad 9\xi^2(\eta\eta'' + \eta'^2) - 45\xi\eta\eta' + 40\eta^2 = 0.$$

Cette dernière est homogène en ξ, η; elle l'est aussi en η, η', η''. On a donc deux procédés pour l'abaisser au premier ordre. Prenons, par exemple, celui qui découle de la deuxième homogénéité. Il consiste à prendre une nouvelle fonction u en posant $\eta = e^{\int u\,d\xi}$. La transformée est alors

$$9\xi^2(u' + 2u^2) - 45\xi u + 40 = 0.$$

Cette dernière est une de celles qui s'intègrent au moyen d'une intégrale particulière. Or il existe manifestement deux intégrales de la forme $u = A\xi^{-1}$, et l'on trouve effectivement, par substitution,

$$9A^2 - 27A + 20 = 0,$$

équation dont les racines sont $\frac{5}{3}$ et $\frac{4}{3}$. En achevant l'intégration, on obtient

$$u = \frac{1}{3\xi}\left(5 - \frac{1}{c\xi^{\frac{2}{3}} + 1}\right).$$

Par une quadrature, on a ensuite

$$\eta = c'\xi^{\frac{4}{3}}\left(1 + c\xi^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{d\xi}{dx}.$$

Séparant les variables et effectuant la nouvelle quadrature, on parvient à cette nouvelle équation, en modifiant la constante c',

$$b(x+a)^2 = \frac{1 + c\xi^{\frac{2}{3}}}{\xi^{\frac{2}{3}}}$$

ou

$$y''^{-\frac{2}{3}} = b(x+a)^2 - c.$$

On retrouve ainsi la seconde des équations ci-dessus, exprimant que y'' est la puissance $-\frac{3}{2}$ d'un polynôme du second degré arbitraire. Deux quadratures ramènent ensuite l'équation finie qui a servi de point de départ.