BULLETIN DE LA S. M. F.

STÉPHANOS

# Sur une propriété remarquable des nombres incommensurables

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 7 (1879), p. 81-83

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__81_1>

*Sur une propriété remarquable des nombres incommensurables;*
par M. Stéphanos.

(Séance du 14 février 1879.)

1. Nous allons faire connaître un mode de développement des nombres en série dont on peut tirer une propriété caractéristique des nombres incommensurables.

2. Pour évaluer un nombre quelconque, on peut employer un système de numération complexe qui se présente très-naturellement et qui admet pour unités successives

$$(1) \qquad \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{1.2}, \quad \frac{1}{1.2.3}, \quad \frac{1}{1.2.3.4}, \quad \dots.$$

3. Suivant ce système de numération, tout nombre A sera représenté par une expression de la forme

$$(2)\qquad A = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1.2} + \frac{a_3}{1.2.3} + \frac{a_4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

où $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ seront des entiers non négatifs déterminés par les conditions

$$(3)\quad A - \frac{a_1}{1} - \frac{a_2}{1.2} - \ldots - \frac{a_i}{1.2\ldots i} < \frac{1}{1.2\ldots i} \quad (i = 1, 2, 3, 4, \ldots).$$

4. Il est évident que tout nombre A ne peut être représenté de cette façon que d'une seule manière.

On aperçoit de plus, aisément, que :

*L'expression* (2), *qui représente, d'après le système de numération* (1), *un nombre quelconque* A, *a un nombre limité ou illimité de termes, suivant que le nombre* A *est commensurable ou non.*

5. Les nombres entiers $a_i$, qui figurent dans l'expression (2) du nombre A, satisfont, en vertu des inégalités (3), aux conditions

$$(4)\qquad a_i < i \quad (i = 2, 3, 4, \ldots).$$

Étant donnée maintenant une expression indéfiniment prolongée

$$(5)\qquad \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1.2} + \frac{a_3}{1.2.3} + \frac{a_4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

satisfaisant aux conditions (4), on peut se demander si le nombre A qu'elle représente est incommensurable ou non, question qui revient à savoir si les nombres $a_i$ satisfont ou non aux conditions (3) ou bien aux suivantes :

$$(6)\qquad \frac{1}{1.2\ldots(i-1)} > \frac{a_i}{1.2\ldots i} + \frac{a_{i+1}}{1.2\ldots(i+1)} + \ldots.$$

6. Avant de répondre à cette question, on peut remarquer que le nombre représenté par l'expression particulière

$$\frac{k-1}{1.2\ldots k} + \frac{k}{1.2\ldots(k+1)} + \ldots \quad (k>1),$$

étant le plus grand nombre représentable par une expression de la forme

$$\frac{a_k}{1.2\ldots k} + \frac{a_{k+1}}{1.2\ldots(k+1)} + \ldots \quad (k > 1),$$

où $a_i < i$, est précisément égal à $\frac{1}{1.2\ldots(k-1)}$.

7. Cela étant, on peut conclure que :

*Une expression indéfiniment prolongée de la forme*

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1.2} + \frac{a_3}{1.2.3} + \frac{a_4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

*ou $a_i < i$, représente un nombre commensurable ou non, suivant que les nombres $a_i$ sont, à partir d'un certain rang $k$, égaux toujours à $i - 1$ ou ne le sont pas.*