BULLETIN DE LA S. M. F.

H. LEMONNIER

Sur la résolution de trois équations du deuxième degré en x, y, z

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 16-42
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__16_1>

Sur la résolution de trois équations du second degré en x, y, z; par M. Lemonnier.

(Séance du 22 novembre 1878.)

Étant données les trois équations du second degré

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' zx + 2 B'' xy \\ &\qquad + 2 C x + 2 C' y + 2 C'' z + D = 0, \\ &A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 + 2 B_1 yz + 2 B'_1 zx + 2 B''_1 xy \\ &\qquad + 2 C_1 x + 2 C'_1 y + 2 C''_1 z + D_1 = 0, \\ &A_2 x^2 + A'_2 y^2 + A''_2 z^2 + 2 B_2 yz + 2 B'_2 zx + 2 B''_2 xy \\ &\qquad + 2 C_2 x + 2 C'_2 y + 2 C''_2 z + D_2 = 0, \end{aligned}\right.$$

elles peuvent ou non se résoudre par rapport aux carrés de deux variables et de leur produit, suivant que l'un au moins des trois déterminants

$$\begin{vmatrix} A' & A'' & B \\ A'_1 & A''_1 & B_1 \\ A'_2 & A''_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A'' & A & B' \\ A''_1 & A_1 & B'_1 \\ A''_2 & A_2 & B'_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & A' & B'' \\ A_1 & A'_1 & B''_1 \\ A_2 & A'_2 & B''_2 \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, ou qu'ils sont nuls à la fois.

I.

Supposons qu'on ait

$$(2)\qquad \delta = \begin{vmatrix} A' & A'' & B \\ A'_1 & A''_1 & B_1 \\ A'_2 & A''_2 & B_2 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

En résolvant les trois équations (1) par rapport à y^2, z^2, yz, on les mettra sous la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} y^2 = ay + bz + c, \\ z^2 = a'y + b'z + c', \\ yz = py + qz + r, \end{cases}$$

a, b, a', b', p, q désignant des fonctions entières de x du premier degré, c, c', c'' des fonctions du second degré.

Déduisons de là deux expressions du produit $y^2z = yyz$, en les ramenant à être du premier degré en y et z. On a

$$\begin{aligned} y^2z &= (ay + bz + c)z = ayz + bz^2 + cz \\ &= a(py + qz + r) + b(a'y + b'z + c') + cz \\ &= (ap + ba')y + (aq + bb' + c)z + ar + bc' \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} yyz &= y(py + qz + r) = py^2 + qyz + ry \\ &= p(ay + bz + c) + q(py + qz + r) + ry \\ &= (ap + pq + r)y + (bp + q^2)z + pc + qr. \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$(pq + r - ba')y + (q^2 + bp - aq - bb' - c)z + pc + qr - ar - bc' = 0.$$

On trouve d'une façon semblable

$$\begin{aligned} z^2y &= (a'y + b'z + c')y = a'y^2 + b'zy + c'y \\ &= a'(ay + bz + c) + b'(py + qz + r) + c'y \\ &= (aa' + b'p + c')y + (ba' + qb')z + a'c + b'r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} zzy &= z(py + qz + r) = pyz + qz^2 + rz \\ &= q(a'y + b'z + c') + p(py + qz + r) + rz \\ &= (p^2 + qa')y + (pq + b'q + r)z + qc' + pr, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (p^2 + qa' - b'p - aa' - c')y + (pq + r - ba')z \\ + pr + qc' - b'r - ca' = 0; \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} y^2z^2 &= (py + qz + r)^2 = p^2y^2 + q^2z^2 + 2pqyz + 2pry + 2qrz + r^2 \\ &= p^2(ay + bz + c) + q^2(a'y + b'z + c') \\ &\quad + 2pq(py + qz + r) + 2pry + 2qrz + r^2 \\ &= (ap^2 + a'q^2 + 2p^2q + 2pr)y \\ &\quad + (bp^2 + b'q^2 + 2pq^2 + 2qr)z + p^2c + q^2c' + 2pqr + r^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
y^2z^2 &= (ay + bz + c)(a'y + b'z + c') \\
&= aa'y^2 + bb'z^2 + (ab' + ba')yz + (ac' + ca')y + (bc' + cb')z + cc' \\
&= aa'(ay + bz + c) + bb'(a'y + b'z + c') \\
&\quad + (ab' + ba')(py + qz + r) + (ac' + ca')y + (bc' + cb')z + cc' \\
&= [a^2a' + ba'b' + (ab' + ba')p + (ac' + ca')]y \\
&\quad + [aba' + bb'^2 + (ab' + ba')q + bc' + cb']z \\
&\quad + aa'c + bb'c' + (ab' + ba')r + cc',
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&[ap^2 + a'q^2 + 2p^2q + 2pr - (a^2 + bb')a' - (ab' + ba')p - (ac' + ca')]y \\
&+ [bp^2 + b'q^2 + 2pq^2 + 2qr - (b'^2 + aa')b - (ab' + ba')q - (bc' + cb')]z \\
&\qquad + cp^2 + c'q^2 + 2pqr + r^2 - (ab' + ba')r - aa'c - bb'c' - cc' = 0.
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi trois équations du premier degré en y et z,

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} Ly + Mz + N = 0, \\ L_1y + M_1z + N_1 = 0, \\ L_2y + M_2z + N_2 = 0, \end{array}\right.$$

qui donnent, à l'égard de x, l'équation

$$(5) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} L & M & N \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est, en général, l'équation résultante en x, du huitième degré.

Les éléments ont pour valeurs

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{l}
L = pq + r - ba', \\
M = q^2 + bp - aq - bb' - c, \\
N = cp + qr - ar - bc', \\
L_1 = p^2 + a'q - b'p - aa' - c', \\
M_1 = pq + r - ba', \\
N_1 = pr + c'q - b'r - ca', \\
L_2 = ap^2 + a'q^2 + 2p^2q + 2pr \\
\qquad - (a^2 + bb')a' - (ab' + ba')p - (ac' + ca'), \\
M_2 = bp^2 + b'q^2 + 2pq^2 + 2qr \\
\qquad - (b'^2 + aa')b - (ab' + ba')q - (bc' + cb'), \\
N_2 = cp^2 + c'q^2 + 2pqr + r^2 - (ab' + ba')r - aa'c - bb'c' - cc'.
\end{array}\right.$$

On voit que l'on a $M_1 = L$, et il est aisé de reconnaître que :

$$(7)\quad \begin{cases} L_2 = L_1 a + M a' + 2pL, & N = (q-a)L + pM - bL_1, \\ M_2 = L_1 b + M b' + 2qL, & N_1 = (p-b')L - qL_1 + a'M, \end{cases}$$

et

$$N_2 = cL_1 + c'M + rL + p(cb' - bc') + q(ac' - ca') + r(pq - ab') + cc'.$$

Comme exemple, soit

$$y^2 = bz + c, \quad z^2 = b'z + c', \quad yz = qz + r.$$

L'équation (5) donne là

$$[r^2 + c'(q^2 - bb' - c)] - [b'q^2 + 2qr - bb'^2 - bc' - cb'] \\ \times [r(qc' - b'r) + c'(qr - bc')] = 0,$$

résultat qui s'obtient aisément d'autre façon.

Par l'élimination de y, on obtient

$$z^2(bz + c) = (qz + r)^2,$$

par suite,

$$(bz + c)(b'z + c') = (qz + r)^2;$$

de sorte que

$$(q^2 - bb')z^2 + (2qr - bc' - cb')z + r^2 - cc' = 0,$$

avec

$$z^2 - b'z - c' = 0,$$

d'où

$$\frac{z^2}{-c'(2qr - bc' - cb') + b'(r^2 - cc')} = \frac{z}{r^2 - cc' + c'(q^2 - bb')} \\ = \frac{1}{-b'(q^2 - bb') - 2qr + bc' + cb'},$$

et, par conséquent,

$$[r + c'(q^2 - bb' - c)]^2 - [b'(q^2 - bb') + 2qr - bc' - cb'] \\ \times [c'(2qr - bc' - cb') - b'(r^2 - cc')] = 0,$$

comme plus haut.

Les équations ainsi obtenues se prêtent à une discussion qui n'est pas sans intérêt.

Deux circonstances principales sont à examiner : celle où le déterminant Δ n'est pas nul identiquement, et celle où il se trouve nul pour toute valeur de x.

Soit Δ une fonction de x ou une constante autre que zéro.

Si Δ ne dépend pas de x sans être nul, les équations (4) sont incompatibles pour toute valeur finie de x. Les équations (1) n'ont pas de solution finie.

Si Δ dépend de x, l'équation (5), du huitième degré au plus, aura des racines. Attribuons à x une valeur qui annule Δ. Pour cette valeur, les équations (4) se réduiront à deux, ou se trouveront incompatibles, ou se réduiront à une seule, ou encore se trouveront identiquement vérifiées, en ce que la valeur de x annulera à la fois les coefficients de y, de z, et les termes indépendants de y et de z.

Dans le premier de ces cas, deux équations étant distinctes, les coefficients de y et de z ne donneront pas un déterminant nul; on en pourra déduire des valeurs de y et de z. De là une solution des équations (1) : c'est le cas général.

Si, dans les trois équations (4), les coefficients de y et de z se trouvent proportionnels sans que les autres termes soient dans les mêmes rapports, le système de ces équations n'aura pas de solution; il en sera de même des équations (1).

Si les équations se réduisent à une seule par la proportionnalité des coefficients et des termes connus, il y aura lieu d'y joindre l'une des équations (3). Comme il ne peut en être autrement lorsque les équations (1) présentent deux solutions composées d'une même valeur de x avec des valeurs de y et de z qui ne sont pas les mêmes, l'équation résultante (5) doit alors présenter, comme racine double, au moins la valeur de x dont il s'agit.

Nous allons reconnaître par une analyse directe que cela a bien lieu.

Dans les conditions dont il s'agit, on a, pour la valeur de x considérée,

$$\frac{L_1}{L} = \frac{M_1}{M} = \frac{N_1}{N}, \quad \frac{L_2}{L} = \frac{M_2}{M} = \frac{N_2}{N}, \quad \frac{L_2}{L_1} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Eu égard aux relations (7), on a

$$\begin{aligned}\Delta = N_2(L^2 - ML_1) + N_1[-2qL^2 + a'M^2 + (2p - b')LM - bLL_1 + aML_1] \\ + N[-2pL^2 + bL_1^2 + (2q - a)LL_1 - a'LM + b'ML_1].\end{aligned}$$

Cherchons ce que devient la dérivée de Δ par rapport à x pour la racine dont il s'agit.

Il est à observer que, cette racine annulant les coefficients de N, N_1, N_2 dans Δ, nous pouvons omettre les dérivées de ces éléments. Nous aurons donc, en faisant l'omission, et tenant compte des valeurs de N_2 et de N_1,

$$
\begin{aligned}
ND_x\Delta = {} & \frac{aL_1 + a'M + 2pL}{L}(L^2 - ML_1)' \\
& + \frac{L_1}{L}(-2qL^2 + a'M^2 + (2p - b')LM - bLL_1 + aML_1)' \\
& + (-2pL^2 + bL_1^2 + (2q - a)LL_1 - a'LM + b'ML_1)' \\
= {} & 2L'(aL_1 + a'M + 2pL) - L'_1\frac{L}{L_1}(aL_1 + a'M + 2pL) \\
& - M'\frac{L_1}{L}(aL_1 + a'M + 2pL) \\
& + \frac{L_1}{L}\Big\{-4qLL' - 2L^2q' + 2a'MM' \\
& \qquad + M^2(a')' + L'M(2p - b') + LM'(2p - b') \\
& \qquad + LM[2p' - (b')'] - L'L_1b - LL'_1b - LL_1(b)' + L'_1Ma \\
& \qquad\qquad + L_1M'a + L_1M(a)'\Big\} \\
& - 4LL'p - 2L^2p' - 2bL_1L'_1 + L_1^2(b)' \\
& + L'L_1(2q - a) + LL'_1(2q - a) \\
& + LL_1[2q' - (a)'] - L'Ma' - LM'a' - LM(a')' \\
& + L'_1Mb' + L_1M'b' + L_1M(b')' \\
= {} & aL_1L' + a'ML' - aLL'_1 - a'\frac{LM}{L_1}L'_1 \\
& - 2pML'_1 - 2qL_1L' + (2p - b')LL' \\
& - b\frac{L_1^2}{L}L' + aLL'_1 + bL_1L'_1 + (2q - a)LL'_1 + b'ML'_1.
\end{aligned}
$$

Mais la relation

$$\frac{aL_1 + a'M + 2pL}{L} = \frac{bL_1 + b'M + 2qL}{M},$$

à cause de $\frac{L}{L_1} = \frac{M}{L}$, donne

$$\frac{bLL_1}{M} = \frac{bL_1^2}{L} = aL_1 + a'M + 2pL - b'L - 2qL_1,$$

et la relation

$$\frac{aL_1 + a'M + 2pL}{L_1} = \frac{bL_1 + b'M + 2qL}{L}$$

donne de même

$$a'\frac{LM}{L_1} = bL_1 + b'M + 2qL - aL - 2pM.$$

En substituant ces valeurs, on trouve

$$ND_x\Delta = 0;$$

la racine considérée est donc racine double au moins.

Lorsqu'une racine de $\Delta = 0$ annule à la fois L, M, L_1, N, N_1, N_2, les équations (4) disparaissent. C'est alors une racine triple de Δ, car elle annule les deux premières dérivées de Δ, puisque les termes de ce déterminant sont du troisième degré à l'égard de ces éléments.

Comme on a, pour lors,

$$\begin{aligned} c &= q^2 + bp - aq - bb', \\ c' &= p^2 + a'q - aa' - b'p, \\ r &= pq - ba', \end{aligned}$$

les équations (3) deviennent

$$\begin{aligned} y^2 &= ay + bz + q^2 + bp - aq - bb', \\ z^2 &= a'y + b'z + p^2 - a'q - aa' - b'p, \\ yz &= py + qz + ba' - pq, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (y-q)(y+q) &= a(y-q) + b(z+p-b'), \\ (z-p)(z+p) &= b'(z-p) + a'(y+q-a), \\ (z-p)(y-q) &= ba' \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} (y-q)(y+q-a) &= b(z+p-b'), \\ (z-p)(z+p-b') &= a'(y+q-a), \\ (z-p)(y-q) &= ba'. \end{aligned}$$

De là

$$z - p = \frac{ba'}{y-q},$$

$$z + p - b' = \frac{ba'}{y-q} + 2p - b' = \frac{(y-q)(2p-b') + ba'}{y-q};$$

puis

$$(y-q)^2(y+q-a) = b(y-q)(2p-b') + b^2a'.$$

Ainsi, y est donné par une équation du troisième degré; trois couples des valeurs de y et de z correspondent à la valeur de x.

Là, si b devient nul, on a

$$(y-q)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad y+q-a = 0.$$

Pour $(y-q)^2 = 0$, on a

$$(z-p)(z+p-b') = a'(2q-a),$$

et, pour $y+q-a=0$, on a

$$z-p=0.$$

Les équations (3) ne comportent pas qu'il y ait pour une valeur de $x = x_1$ quatre couples de valeurs correspondantes de y et de z, que par suite l'équation résultante ait une racine quadruple.

Car, si les équations (1)

$$\begin{aligned} P &= Ax^2 + \ldots + D = 0, \\ Q &= A_1x^2 + \ldots + D_1 = 0, \\ R &= A_2x^2 + \ldots + D_2 = 0 \end{aligned}$$

présentaient quatre solutions pour $x = x_1$, on aurait, pour cette valeur de x,

$$R = \lambda P + \mu Q;$$

par suite,

$$\begin{aligned} A'_2 &= \lambda A' + \mu A'_1, \\ A''_2 &= \lambda A'' + \mu A''_1, \\ B_2 &= \lambda B + \mu B_1, \end{aligned}$$

et, en conséquence,

$$\delta = \begin{vmatrix} A' & A'' & B \\ A'_1 & A''_1 & B_1 \\ A'_2 & A''_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous avons à voir, en second lieu, ce qui concerne les équations (3) et (4), quand le déterminant Δ est nul pour toute valeur de x.

Si deux des équations (4) présentent alors pour y et z des coefficients qui ne soient pas proportionnels pour toute valeur de x, les équations (4), x restant arbitraire, reviennent à ces deux équations. Celles-ci détermineront alors y et z pour toute valeur attribuée à x arbitrairement. Il y aura une ligne commune sur les surfaces représentées par les équations (3), mais cette ligne ne présentera qu'un point, en général, dans un plan quelconque parallèle au plan yz. Comme, d'ailleurs, pour toute valeur de x d'un module fini, les équations (3) ne peuvent admettre que des valeurs finies de y et de z, la ligne sera une ligne droite.

Cette droite pourra analytiquement se fixer par deux points particuliers. Mais les trois surfaces n'auront-elles pas d'autres points communs que ceux de la droite? Pour étudier la question, considérons le cas où l'axe des x est une droite commune.

Les équations (3) sont alors

$$y^2 = ay + bz, \quad z^2 = a'y + b'z, \quad yz = py + qz,$$

et les équations (4) deviennent

$$\begin{gathered}(pq - ba')y + (q^2 + bp - aq - bb')z = 0,\\ (p^2 + a'q - b'p - aa')y + (pq - ba')z = 0,\\ [ap^2 + a'q^2 + 2p^2q - (a^2 + bb')a' - (ab' + ba')p]y\\ + [bp^2 + b'q^2 + 2pq^2 - (b'^2 + aa')b - (ab' + ba')q]z = 0,\end{gathered}$$

Les deux premières de ces dernières équations se réduisent à une seule pour toute valeur de x satisfaisant à la condition

$$(pq - ba')^2 - (p^2 + a'q - b'p - aa')(q^2 + bp - aq - bb') = 0.$$

C'est, en général, une équation du quatrième degré qui donnera quatre valeurs de x. Pour avoir les valeurs de y et de z correspondantes à une racine, on prendra

$$\begin{gathered}(pq - ba')y + (q^2 + bp - aq - bb')z = 0,\\ yz = py + qz.\end{gathered}$$

De là

$$\begin{gathered}\frac{y}{q^2 + bp - aq - bb'} = \frac{z}{ba' - pq},\\ y(ba' - pq) = p(q^2 + bp - aq - bb') + q(ba' - pq),\\ z(q^2 + bp - aq - bb') = p(q^2 + bp - aq - bb') + q(ba' - pq).\end{gathered}$$

Pour que l'équation $y^2 = ay + bz$ soit vérifiée par les valeurs de y et de z ainsi obtenues, il faut avoir

$$y(q^2 + bp - aq - bb') = a(q^2 + bp - aq - bb') + b(ba' - pq),$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{q^2 + bp - aq - bb'}{ba' - pq} &= \frac{a(q^2 + bp - aq - bb') + b(ba' - pq)}{p(q^2 + bp - aq - bb') + q(ba' - pq)} \\ &= \frac{b(ba' - pq)}{-aba' + bp^2 - bb'p + a'bq} = \frac{ba' - pq}{p^2 + a'q - b'p - aa'},\end{aligned}$$

ce qui est la relation supposée.

L'équation $z^2 = a'y + b'z$ est également vérifiée.

Ainsi, outre la droite commune, il y a quatre points communs sur lesquels, bien entendu, il peut s'en trouver de coïncidents ou passant à l'infini.

Observons toutefois que, si l'on avait pour toutes valeurs de x

$$(pq - ba')^2 - (p^2 + a'q - b'p - aa')(q^2 + bp - aq - bb') = 0$$

ou

$$\frac{pq - ba'}{p^2 + a'q - b'p - aa'} = \frac{q^2 + bp - aq - bb'}{pq - ba'},$$

on satisferait aux équations proposées, sans détermination de x, par des valeurs de y et de z déduites de

$$yz = py + qz \quad \text{et} \quad (qp - ba')y + (q^2 + bp - aq - bb')z = 0.$$

Ces valeurs, étant

$$y = q + \frac{p(q^2 + bp - aq - bb')}{ba' - pq},$$

$$z = p + \frac{q(ba' - pq)}{q^2 + bp - aq - bb'},$$

seraient du premier degré en x, si le rapport $\frac{pq - ba'}{p^2 + a'q - b'p - aa'}$ était constant. Il y aurait donc alors une seconde droite commune.

Mais on peut voir aisément que

$$\begin{aligned}(ax^2 + bx + c)^2 = &\left[ax^2 + (b + \sqrt{b^2 - 4ac})x + \frac{b^2 - 2ac + b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \\ &\times \left[ax^2 + (b - \sqrt{b^2 - 4ac})x + \frac{b^2 - 2ac - b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right];\end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{ax^2+bx+c}{ax^2+\left(b+\sqrt{b^2-4ac}\right)x+\dfrac{b^2-2ac+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$$=\frac{ax^2+\left(b-\sqrt{b^2-4ac}\right)x+\dfrac{b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{ax^2+bx+c},$$

identité où les membres varient avec x.

Si le rapport $\dfrac{pq-ba'}{p^2+a'q-b'p-aa'}$ était donc dans ces conditions, les expressions précédentes de y et de z ne seraient plus du premier degré en x. Avec la droite ox commune, les trois surfaces auraient une ligne du troisième degré commune, une cubique commune, c'est-à-dire que l'intersection complète des deux premières appartiendrait à la troisième. Comme la forme des trois équations ne comporte pas ce fait, puisque la troisième ne saurait être une combinaison linéaire des autres, il y a lieu de conclure que pareille circonstance ne peut se présenter.

D'après ce qui vient d'être vu, pour en revenir aux équations (3), lorsque le déterminant Δ est nul identiquement et que celui des coefficients de y et de z dans deux des équations (4) ne l'est pas, on trouvera la droite commune et les points qui sont en outre communs, en posant

$$\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z+\delta_1=u,$$
$$\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z+\delta_2=v,$$

ou plutôt

$$y=\alpha u+\beta v+\gamma x+\delta,$$
$$z=\alpha' u+\beta' v+\gamma' z+\delta',$$

substituant ces expressions de y et de z dans les deux équations (4) à considérer, puis égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de x. Les constantes pourront se déterminer de façon que l'on ait ainsi deux équations homogènes en u et v. La droite commune sera donnée par $u=0$, $v=0$, par suite, $y=\gamma x+\delta$, $z=\gamma' x+\delta'$; et l'équation relative aux valeurs particulières de x s'obtiendra en égalant à zéro le déterminant des coefficients de u et de v dans les résultats de la substitution ou celui des coefficients de y et de z dans les premières équations.

Prenons pour exemple les trois équations

$$\begin{aligned}
&y^2 = xz,\\
&z^2 = (a' + b' + 2x)y + (b' + x)z + a'x + 2x^2,\\
&yz = -xy - xz - x^2.
\end{aligned}$$

Les deux premières équations (4) sont alors

$$\begin{aligned}
(a' + b' + 2x)xy + (b' + x)xz + a'x^2 + x^3 = 0,\\
2(a' + x)xy + (a' + b' + 2x)xz + (a' - b')x^2 = 0.
\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned}
y = \alpha u + \beta v + \gamma x + \delta,\\
z = \alpha' u + \beta' v + \gamma' x + \delta',
\end{aligned}$$

on devra avoir

$$\begin{aligned}
(a' + b' + 2x)x(\gamma x + \delta) + (b' + x)x(\gamma' x + \delta') + a'x^2 + x^3 = 0,\\
2(a' + x)x(\gamma x + \delta) + (a' + b' + 2x)x(\gamma' x + \delta') + (a' + b')x^2 = 0,
\end{aligned}$$

identiquement, d'où

$$\begin{aligned}
2\gamma + \gamma' + 1 = 0,\\
(a' + b')\gamma + 2\delta + b'\gamma' + \delta' + a' = 0,\\
(a' + b')\delta + b'\delta' = 0,\\
2\gamma + 2\gamma' = 0,\\
2\delta + 2a'\gamma + (a' + b')\gamma' + 2\delta' + a' - b' = 0,\\
2a'\delta + (a' + b')\delta' = 0.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit, supposé $a' \gtrless b'$, qu'on aura

$$\delta = 0, \quad \delta' = 0, \quad \text{puis} \quad \gamma = -1, \quad \gamma' = 1,$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}
(a' + b' + 2x)x(\alpha u + \beta v) + (b' + x)x(\alpha' u + \beta' v) = 0,\\
2(a' + x)x(\alpha u + \beta v) + (a' + b' + 2x)x(\alpha' u + \beta' v) = 0,
\end{aligned}$$

ou

$$[(a' + b' + 2x)x + (b' + x)\alpha']xu + [(a' + b' + 2x)\beta + (b' + x)\beta']xv = 0,$$

$$\begin{aligned}
&[2(a' + x)\alpha + (a' + b' + 2x)\alpha']\alpha u\\
&+ [2(a' + x)\beta + (a' + b' + 2x)\beta']xv = 0,
\end{aligned}$$

ce qui donne l'équation

$$[(a'+b'+2x)\alpha+(b'+x)\alpha'][2(a'+x)\beta+(a'+b'+2x)\beta']x^2$$
$$-[(a'+b'+2x)\beta+(b'+x)\beta'][2(a'+x)\alpha+(a'+b'+2x)\alpha']x^2=0,$$

ce qui fait

$$[(a'+x)^2+(b'+x)^2]x^2(\alpha\beta'-\alpha'\beta)=0.$$

C'est bien

$$(a'+b'+2x)^2-2(a'+x)(b'+x);$$

de là

$$x^2=0 \quad \text{et} \quad a'+x=\pm(b'+x)i,$$
$$x(1\mp i)=-a'\pm b'i,$$
$$x=-\frac{a'+b'}{2}\pm\frac{b'-a'}{2}i.$$

La droite commune a d'ailleurs pour équations

$$y=-x \quad \text{et} \quad z=x.$$

Les équations (4) pourront être incompatibles, en ce que les coefficients de y et de z y soient dans des rapports constants autres que ceux des autres termes. Alors les équations (3) n'auront pas de solution.

Soient les équations (4) se réduisant à une seule par la proportionnalité des termes.

On tirera de cette équation la valeur de y ou de z et on la portera dans l'une des équations (3) : de là, une équation en y ou z du second degré, par suite, pour toute valeur de x, deux couples de valeurs de y et de z, ou, pour les trois surfaces, deux points communs dans tout plan parallèle au plan yz. C'est ce qui peut avoir lieu quand les surfaces ont deux droites communes, et encore quand elles ont une conique commune.

Or, quand deux surfaces du second degré P et Q ont deux droites communes D et D′ du même système sur chacune, leur intersection se complète par deux autres droites analogues D_1 et D'_1 d'autre système qui peuvent se confondre. Qu'une troisième surface R contienne D et D′, elle coupera P suivant deux autres droites D_2, D'_2 du système de D_1 et D'_1, et Q suivant les droites analogues D_3, D'_3. Les trois surfaces n'auront donc de points communs que sur D et D′, ou bien elles auront avec ces droites une troisième droite commune les rencontrant, ou bien elles auront avec elles deux autres droites communes. Dans la circonstance qui nous occupe, le premier de ces cas sera le seul possible.

Si les trois surfaces ont une conique commune, les trois équations étant susceptibles d'être

$$P = o, \quad Q = kP + uv = o, \quad R = k'P + uw = o,$$

il y aura, outre la conique commune, deux points communs donnés par $P = o$, $v = o$, $w = o$. Les équations (1) et (3) seront telles que, deux à deux, elles donneront, par une combinaison linéaire convenable, le système de deux plans, et, dans les combinaisons, il y aura un plan commun. Par cette voie, ce cas se distinguera immédiatement du précédent. Il est d'ailleurs à observer que, pour chacune des valeurs de x relatives aux points communs en dehors de la conique commune, l'équation du premier degré en y et z deviendra identique, en sorte que ces valeurs résulteront d'un facteur en x commun aux termes de l'équation.

C'est ainsi que, pour

$$\begin{aligned} P &= Ax^2 + y^2 + A''z^2 + D = o,\\ Q &= Ax^2 + y^2 + A''z^2 + D + 2(y+g)(z+k) = o,\\ R &= Ax^2 + y^2 + A''z^2 + D + 2(z+h)(z+k) = o, \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} yz &= -ky - gz - gk,\\ z^2 &= -(h+k)z - hk,\\ y^2 &= A'(h+k)z - Ax^2 - D + A''hk. \end{aligned}$$

Les trois équations du premier degré sont

$$oy + (g^2 + A''h^2 + D + Ax^2)z + k(Ax^2 + D + g^2 + A''h^2) = o,$$
$$oy + oz + o = o,$$
$$oy - (h+k)(g^2 + A''h^2 + D + Ax^2)z - k(h+k)(Ax^2 + D + A''h^2 + g^2) = o.$$

Il n'y a bien là qu'une seule équation

$$(Ax^2 + D + g^2 + A''h^2)(z+k) = o,$$

d'où le plan de la conique commune par $z + k = o$, et, pour les deux points communs par ailleurs,

$$Ax^2 + D + g^2 + A''h^2 = o.$$

Une dernière circonstance est celle où les équations (4) deviennent identiques pour toute valeur de x. Cela arrive quand on a, quelque valeur qui s'attribuc à x,

$$L = 0, \quad L_1 = 0, \quad M = 0, \quad p(cb' - bc') + q(ac' - ca') + \nu(pq - ab') = 0.$$

Les équations (3) peuvent alors s'écrire

$$\begin{gathered}
(y - q)(y + q - a) = b(z + p - b'),\\
(z - p)(z + p - b') = a'(y + q - a),\\
(z - p)(y - q) = ba'.
\end{gathered}$$

Les surfaces représentées par les deux premières équations ont une droite commune que déterminent

$$\begin{gathered}
y + q - a = 0,\\
z + p - b' = 0,
\end{gathered}$$

et tout point appartenant à ces mêmes surfaces en dehors de la droite appartient à la troisième surface. Il y a donc là une cubique commune ayant pour équations

$$\begin{gathered}
(y - q)^2 (y + q - a) = b[(2p - b')(y - q) + ba'],\\
z - p = \frac{ba'}{y - q}.
\end{gathered}$$

II.

Nous avons encore à traiter les équations (1) lorsque les trois déterminants

$$\begin{vmatrix} A' & A'' & B \\ A'_1 & A''_1 & B_1 \\ A'_2 & A''_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A'' & A & B' \\ A''_1 & A_1 & B'_1 \\ A''_2 & A_2 & B'_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & A' & B'' \\ A_1 & A'_1 & B''_1 \\ A_2 & A'_2 & B''_2 \end{vmatrix}$$

sont nuls à la fois, de sorte que ces équations ne peuvent alors se résoudre par rapport aux carrés et aux produits de deux des inconnues x, y, z.

Nous écarterons d'abord le cas où, les termes du second degré ayant leurs coefficients proportionnels, à prendre les équations deux à deux, on pourra immédiatement, par l'élimination de ces termes, obtenir deux équations du premier degré en x, y, z; cela a lieu en particulier pour trois sphères. Il en est ainsi quand les déterminants mineurs relatifs aux déterminants δ sont tous nuls.

Si, dans le déterminant δ, les éléments sont tous nuls, les équations, étant

$$\begin{aligned}
&Ax^2 + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,\\
&A_1x^2 + 2B'_1xz + 2B''_1xy + 2C_1x + 2C'_1y + 2C''_1z + D_1 = 0,\\
&A_2x^2 + 2B'_2xz + 2B''_2xy + 2C_2x + 2C'_2y + 2C''_2z + D_2 = 0,
\end{aligned}$$

sont du premier degré en y et z; il s'ensuit alors

$$\begin{vmatrix}
B''x + C' & B'x + C'' & Ax^2 + 2Cx + D \\
B''_1x + C'_1 & B'_1x + C''_1 & A_1x^2 + 2C_1x + D_1 \\
B''_2x + C'_2 & B'_2x + C''_2 & A_2x^2 + 2C_2x + D_2
\end{vmatrix} = 0.$$

On aurait une équation analogue pour y si les éléments de δ' étaient nuls, une équation en z si ceux de δ'' l'étaient.

Au cas où les trois coefficients de y^2, ceux de z^2, mais non ceux de yz, ne sont pas nuls à la fois, les équations étant

$$\begin{aligned}
&Ax^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,\\
&A_1x^2 + 2B_1yz + 2B'_1zx + 2B''_1xy + 2C_1x + 2C'_1y + 2C''_1z + D_1 = 0,\\
&A_2x^2 + 2B_2yz + 2B'_2zx + 2B''_2xy + 2C_2x + 2C'_2y + 2C''_2z + D_2 = 0,
\end{aligned}$$

on pourra, par deux éliminations de yz, obtenir deux équations du premier degré en y et z; en y joignant l'une des premières équations contenant yz, on aura un système équivalent, et une équation résultante en x s'ensuivra immédiatement. Pour l'obtenir sous forme d'un déterminant, observons que, en désignant les trois équations par

$$\begin{aligned}
ayz + by + cz + p &= 0,\\
\alpha y + \beta z + q &= 0,\\
\alpha' y + \beta' z + r &= 0,
\end{aligned}$$

et y joignant

$$\begin{aligned}
\alpha y^2 + \beta yz + qy &= 0,\\
\alpha' y^2 + \beta' yz + ry &= 0,\\
\alpha yz + \beta z^2 + qz &= 0,
\end{aligned}$$

on aura

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b & c & p \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & q \\ 0 & 0 & 0 & \alpha' & \beta' & r \\ \alpha & 0 & \beta & q & 0 & 0 \\ \alpha' & 0 & \beta' & r & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 & q & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

d'ou

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & p \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & q \\ 0 & 0 & \alpha' & \beta' & r \\ \alpha & \beta & q & 0 & 0 \\ \alpha' & \beta' & r & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

puis

$$-\begin{vmatrix} a & b & c & p \\ 0 & \alpha & \beta & q \\ 0 & \alpha' & \beta' & r \\ -\alpha'\beta + \alpha\beta' & -\alpha' q + \alpha r & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & q \\ \alpha' & \beta' & r \\ a(-\alpha' q + \alpha r) - b(-\alpha'\beta + \alpha\beta') & -(\alpha\beta' - \alpha'\beta)c & -p(-\alpha'\beta + \alpha\beta') \end{vmatrix} = 0,$$

équation du sixième degré en x.

Si les coefficients de yz sont nuls, ainsi que ceux de y^2 ou de z^2, ceux de z^2 par exemple, les équations étant

$$\begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0, \\ &A_1x^2 + \ldots + D_1 = 0, \\ &A_2x^2 + \ldots + D_2 = 0, \end{aligned}$$

on pourra en déduire deux équations ne contenant pas y^2, et l'on aura ainsi

$$\begin{aligned} A'y^2 + ay + bz + p &= 0, \\ \alpha y + \beta z + q &= 0, \\ \alpha' y + \beta' z + r &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \alpha y^2 + \beta yz + qy &= 0, \\ \alpha' y^2 + \beta' yz + ry &= 0. \end{aligned}$$

De là

$$\begin{vmatrix} A' & o & a & b & p \\ o & o & \alpha & \beta & q \\ o & o & \alpha' & \beta' & r \\ \alpha & \beta & q & o & o \\ \alpha' & \beta' & r & o & o \end{vmatrix} = o,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} A' & a & b & p \\ o & \alpha & \beta & q \\ o & \alpha' & \beta' & r \\ \beta\alpha' - \alpha\beta' & \beta r - \beta' q & o & o \end{vmatrix} = o,$$

puis

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & q \\ \alpha' & \beta' & r \\ A'(\beta r - \beta' q) - a(\beta\alpha' - \alpha\beta') & -b(\beta\alpha' - \alpha\beta') & -p(\beta\alpha' - \alpha\beta') \end{vmatrix} = o.$$

Ces premiers cas particuliers ainsi traités, soient les équations (1) au cas où les trois déterminants δ sont nuls, sans que deux colonnes y aient leurs éléments nuls; par exemple, δ étant nul, $\begin{vmatrix} A' & A'' & B \\ A'_1 & A''_1 & B_1 \\ A'_2 & A''_2 & B_2 \end{vmatrix} = o$; nous supposerons que dans deux colonnes au moins les éléments ne sont pas nuls. Si cela est pour les deux dernières colonnes, les trois déterminants $A''_1 B_2 - A''_2 B_1$, $A'' B_2 - A''_2 B$, $A'' B_1 - A''_1 B$ pourront ne pas être nuls à la fois. Si l'on multiplie les équations (1) respectivement par ces mineurs, et qu'on ajoute, les termes en y^2, yz, z^2 disparaîtront, et l'on aura une équation telle, que

$$ax^2 + 2b'xz + 2b''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = o.$$

Il en sera de même si l'on multiplie par $A'_1 B_2 - A'_2 B_1$, $A' B_2 - A'_2 B$, $A' B_1 - A'_1 B$, au cas où ces mineurs ne seront pas nuls à la fois, les équations (1) supposées distinctes.

Si ces deux suites de déterminants mineurs sont nulles à la fois avec $B \gtrless 0$, on aura

$$A''_1 = A'' \frac{B_1}{B}, \quad A''_2 = A'' \frac{B_2}{B}, \quad A'_2 = A' \frac{B_2}{B}, \quad A'_1 = A'' \frac{B_1}{B}.$$

Qu'on multiplie alors la première équation par $\frac{B_1}{B}$ et qu'on soustraye la seconde, les termes en y^2, z^2, yz disparaîtront, et l'on aura une équation de la forme indiquée ci-dessus.

Dans les conditions supposées, on obtiendra de même les équations

$$a'_1 y^2 + 2b_1 yz + 2b''_1 xy + 2c_1 x + 2c'_1 y + 2c''_1 z + d_1 = 0,$$
$$a''_2 z^2 + 2b_2 yz + 2b'_2 xz + 2c_2 x + 2c'_2 y + 2c''_2 z + d_2 = 0.$$

Si les trois équations sont distinctes, qu'aucune d'elles ne puisse se déduire des autres, elles pourront remplacer les premières. C'est ce qui a lieu lorsque les coefficients en a'_1, a''_2 sont chacun différents de zéro, même lorsqu'un seul d'entre eux est nul.

Les trois équations peuvent s'écrire

$$\alpha y + \alpha' z + p = 0,$$
$$a'_1 y^2 + 2b_1 yz + \beta y + \beta' z + q = 0,$$
$$a''_2 z^2 + 2b_2 yz + \gamma y + \gamma' z + r = 0.$$

Si l'on avait

$$a'_1 = 0 \quad \text{et} \quad a''_2 = 0,$$

les deux dernières équations pourraient devenir équivalentes; il y aurait alors à prendre à la place de l'une d'elles l'une des équations (1).

C'est pourquoi il convient de considérer d'abord les trois équations

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$
$$2(b''x + c')y + 2(b'x + c'')z + ax^2 + 2cx + d = 0,$$
$$2b_1 yz + 2c'_1 y + 2c''_1 z + 2c_1 x + d_1 = 0,$$

b_1 supposé différent de zéro, et le terme yz pouvant, par suite, avoir été éliminé de la première équation. Sous une désignation plus simple, les équations sont

$$A'y^2 + A''z^2 + \alpha y + \alpha' z + p = 0,$$
$$\beta y + \beta' z + q = 0,$$
$$2b_1 yz + \gamma y + \gamma' z + r = 0.$$

Multiplions la seconde par $b_1 y$ et $b_1 z$, nous aurons

$$\beta b_1 y^2 + \beta' b_1 yz + q b_1 y = 0,$$
$$\beta b_1 yz + \beta' b_1 z^2 + b_1 q z = 0,$$

ce qui donne, eu égard à la troisième,

$$\beta b_1 y^2 - \beta'(\gamma y + \gamma' z + r) + q b_1 y = 0,$$
$$-\beta(\gamma y + \gamma' z + r) + \beta' b_1 z^2 + b_1 q z = 0,$$

ou bien

$$\beta b_1 y^2 + (q b_1 - \beta'\gamma) y - \beta'\gamma' z - \beta' r = 0,$$
$$\beta' b_1 z^2 - \beta\gamma y + (b_1 q - \beta\gamma') z - \beta r = 0.$$

D'autre part, en multipliant la première équation par βy, on a

$$A'\beta y^3 + A''\beta y z^2 + \alpha\beta y^2 + \alpha'\beta yz + p\beta y = 0,$$

ce qui se change en

$$-A' y^2(\beta' z + q) - A''\frac{\beta z}{b_1}(\gamma y + \gamma' z + r) + \alpha\beta y^2 + \alpha'\beta yz + p\beta y = 0,$$

puis

$$A'\beta' y \frac{1}{b_1}(\gamma y + \gamma' z + r) - A' q y^2 - \frac{A''\beta\gamma}{b_1} yz - A''\frac{\beta\gamma'}{b_1} z^2 - \frac{A''\beta r}{b_1} z$$
$$+ \alpha\beta y^2 + \alpha'\beta yz + p\beta y = 0,$$

ou

$$\left(\frac{A'\beta'\gamma}{b_1} - A' q + \alpha\beta\right) y^2 - \frac{A''\beta\gamma'}{b_1} z^2 + \left(A'\frac{\beta'\gamma'}{b_1} - A''\frac{\beta\gamma}{b_1} + \alpha'\beta\right) yz$$
$$+ \left(\frac{A'\beta' r}{b_1} + p\beta\right) y - \frac{A''\beta r}{b_1} z = 0,$$

et par suite

$$(A'\beta'\gamma - A' q b_1 + \alpha\beta b_1) y^2 - A''\beta\gamma' z^2$$
$$+ \left(A'\beta' r + p b_1 \beta - A'\beta'\gamma'\gamma \frac{1}{b_1} + A''\beta\gamma^2 \frac{1}{b_1} - \alpha'\beta\gamma\right) y$$
$$- \left[A''\beta r + \frac{\gamma'}{b_1}(A'\beta'\gamma' - A''\beta\gamma + \alpha'\beta b_1)\right] z$$
$$- \frac{r}{b_1}(A'\beta'\gamma' - A''\beta\gamma + \alpha'\beta b_1) = 0.$$

Les cinq équations que nous venons d'obtenir en y^2, z^2, y et z

donnent finalement

$$\begin{vmatrix} A' & A'' & \alpha & \alpha' & p \\ o & o & \beta & \beta' & q \\ \beta b_1 & o & qb_1 - \beta'\gamma & -\beta'\gamma' & -\beta' r \\ o & \beta' b & -\beta\gamma & b_1 q - \beta\gamma' & -\beta r \\ u & -A''\beta\gamma' & u' & u'' & u''' \end{vmatrix} = o,$$

en posant

$$u = A'(\beta'\gamma - b_1 q) + \alpha\beta b_1,$$

$$u' = A'\beta'\left(r - \frac{\gamma'\gamma}{b_1}\right) + A''\beta\gamma^2\frac{1}{b_1} + \beta(b_1 p - \alpha'\gamma),$$

$$u'' = -A''\beta r - \frac{\gamma'}{b_1}(A'\beta'\gamma' - A''\beta\gamma + \alpha'\beta b_1),$$

$$u''' = -\frac{r}{b_1}(A'\beta'\gamma' - A''\beta\gamma + \alpha'\beta b_1),$$

équation du huitième degré, en général, où le coefficient de x^8 est

$$\begin{aligned} b_1^2 \{ & -A'A''a^4 + 4(A''B''b'' + A'B'b')a^3 \\ & - 4[A(A'b'^2 + A''b''^2) + 4b'b''B'B'']a^2 \\ & + 16b'b''(b'B'' + b''B')aA - 16b'^2b''^2A^2 \}. \end{aligned}$$

On peut obtenir l'équation avec des éléments simples sous la forme d'un déterminant du neuvième ordre.

Le cas particulier de $a'_1 = o$ mérite encore d'être traité à part. Les équations étant

$$\begin{aligned} 2(b''x + c')y + 2(b'x + c'')z + ax^2 + 2cx + d &= o, \\ 2b_1yz + 2(b''_1x + c'_1)y + 2c''_1z + 2c_1x + d_1 &= o, \\ a''_2z^2 + 2b_2yz + 2(b'_2x + c''_2)z + 2c'_2y + 2c_2x + d_2 &= o, \end{aligned}$$

désignons-les par

$$\begin{aligned} \alpha y + \alpha' z + p &= o, \\ 2b_1yz + \beta y + \beta' z + q &= o, \\ a''_2 z^2 + 2b_2yz + \gamma y + \gamma' z + r &= o. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \alpha y^2 + \alpha' yz + py &= o, \\ \alpha yz + \alpha' z^2 + pz &= o, \\ \alpha y^2 z + \alpha' yz^2 + pyz &= o, \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$2b_1 yz^2 + \beta yz + \beta' z^2 + qz = 0,$$
$$a''_2 z^2 y + 2b_2 y^2 z + \gamma y^2 + \gamma' yz + ry = 0,$$

d'où

$$-2b_1 2b_2 y^2 z - 2b_1\gamma y^2 + a''_2\beta' z^2 + (a''_2\beta - 2b_1\gamma')yz - 2b_1 ry + a''_2 qz = 0,$$
$$-2b_1 2b_2 yz^2 - 2b_2\beta yz - 2b_2\beta' z^2 - 2b_2 qz = 0,$$

par suite,

$$\begin{aligned}&2b_1 2b_2 pyz - 2b_1\alpha\gamma y^2 + (a''_2\alpha\beta' - 2b_2\alpha'\beta')z^2\\ &\quad + (a''_2\beta\alpha - 2b_1\gamma'\alpha - 2b_2\beta\alpha')yz - 2b_1 r\alpha y + (a''_2 q\alpha - 2b_2 q\alpha')z = 0,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&-2b_1\alpha\gamma y^2 + (a''_2\alpha - 2b_2\alpha')\beta' z^2\\ &\quad + (a''_2\alpha\beta - 2b_1\alpha\gamma' - 2b_2\alpha'\beta + 2b_1 2b_2 p)yz\\ &\qquad - 2b_1 r\alpha y + (a''_2\alpha - 2b_2\alpha')qz = 0.\end{aligned}$$

Il y a là six équations d'où résulte

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 0 & 2b_1 & \beta & \beta' & q \\ 0 & a''_2 & 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \\ \alpha & 0 & \alpha' & p & 0 & 0 \\ 0 & \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ -2b_1\alpha\gamma & (a''_2\alpha - 2b_2\alpha')\beta' & (a''_2\beta - 2b_1\gamma')\alpha - 2b_2\alpha'\beta + 2b_1 2b_2 p & -2b_1 r\alpha & (a''_2\alpha - 2b_2\alpha')q & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui peut se réduire, suppression faite du facteur α, à

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 2b_1 & \beta & \beta' & q \\ a''_2 & 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \\ \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ a''_2\alpha - 2b_2\alpha')\beta' & a''_2\alpha\beta - 2b_1\alpha\gamma' + 2b_1\alpha'\gamma - 2b_2\alpha'\beta + 2b_1 2b_2 p & 2b_1 p\gamma - 2b_1 r\alpha & (a''_2\alpha - 2b_2\alpha')q & 0 \end{vmatrix}$$

Les termes du degré le plus élevé sont là du septième et proviennent de

$$(a''_2\alpha\beta - 2b_1\alpha\gamma' - 2b_2\alpha'\beta + 2b_1 2b_2 p)\alpha'\beta\gamma' p,$$

ce qui donne

$$x^7(a''_2 b'' b''_1 - 2b_1 b'' b'_2 - 2b_2 b' b''_1 + 2b_1 2b_2 a) b' b''_1 b'_2 a.$$

En cas de $a''_2 = 0$, cette équation peut se réduire, suppression faite de α', à

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 2b_1 & \beta & \beta' & q \\ 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \\ 2b_2\alpha\beta' - 2b_1\alpha\gamma' + 2b_1\alpha'\gamma - 2b_2\alpha'\beta + 2b_1 2b_2 p & 2b_1 p\gamma - 2b_1 r\alpha & 2b_2\beta' p - 2b_2\alpha' q & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou à

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 2b_1 & \beta & \beta' & q \\ 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \\ 2b_1(\alpha'\gamma - \alpha\gamma') + 2b_2(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + 2b_1 2b_2 p & 2b_1(p\gamma - r\alpha) & 2b_2(\beta' p - \alpha' q) & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

le terme du plus haut degré y est

$$ab''_1 b'_2(-2b_1 b'' b'_2 - 2b_2 b' b''_1 + 2b_1 2b_2 a)x^6.$$

Remarque. — Quand on fait $b_1 = 0$ dans l'équation due, plus haut, à l'élimination de y^2z et yz^2, on obtient

$$(a''_2\alpha - 2b_2\alpha')(\beta yz + \beta' z^2 + qz) = 0;$$

or, l'équation résultante pour les équations

$$\alpha y + \alpha' z + p = 0,$$
$$\beta y + \beta' z + q = 0,$$
$$a''_2 z^2 + 2b_2 yz + \gamma y + \gamma' z + r = 0$$

peut s'obtenir en y joignant

$$\alpha y^2 + \alpha' yz + py = 0,$$
$$\alpha yz + \alpha' z^2 + pz = 0$$

et

$$\beta yz + \beta' z^2 + qz = 0.$$

L'équation précédente, sauf à en dégager le facteur $a''_2\alpha - 2b_2\alpha'$, peut donc, quand on y fait $b_1 = 0$, s'appliquer à cette circonstance.

Mais, plus simplement, l'équation résultante est alors

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \beta' & q \\ 0 & a''_2 & 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \\ \alpha & 0 & \alpha' & p & 0 & 0 \\ 0 & \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ 0 & \beta' & \beta & 0 & q & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

c'est, en écartant le facteur α,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 0 & \beta & \beta' & q \\ a''_2 & 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \\ \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ \beta' & \beta & 0 & q & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En prenant l'équation

$$\beta y^2 + \beta' yz + qy = 0$$

au lieu de

$$\beta yz + \beta' z^2 + qz = 0,$$

on a

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \beta' & q \\ \alpha & 0 & \alpha' & p & 0 & 0 \\ 0 & \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ \beta & 0 & \beta' & q & 0 & 0 \\ 0 & a''_2 & 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 0 & \beta & \beta' & q \\ 0 & \alpha\beta' - \alpha'\beta & \alpha' q - \beta p & 0 & 0 \\ \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ a''_2 & 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & \beta & \beta' & q \\ \alpha\beta' - \alpha'\beta & \alpha q - \beta p & 0 & 0 \\ -a''_2\alpha + 2b_2\alpha' & \alpha'\gamma & -a''_2 p + \alpha'\gamma' & \alpha' r \end{vmatrix} = 0,$$

puis

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & p \\ \beta & \beta' & q \\ (\alpha q-\beta p)(a''_2\alpha-2b_2\alpha')+a'\gamma(\alpha\beta'-\alpha'\beta) & (-a''_2 p+\alpha'\gamma')(\alpha\beta'-\alpha'\beta) & \alpha' r(\alpha\beta'-\alpha'\beta) \end{vmatrix}=0,$$

déterminant qui s'annule pour $\alpha'=0$, de sorte que $\alpha'y$ est encore un facteur à supprimer.

Le résultat qui s'ensuit s'obtient plus simplement en résolvant, par rapport à y et à z, les deux premières équations de la question et substituant leurs valeurs dans la troisième. De même, au cas de $b_2=0$, l'équation résultante devient

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 2b_1 & \beta & \beta' & q \\ a''_2 & 0 & \gamma & \gamma' & r \\ \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ a''_2\alpha\beta & a''_2\alpha\beta-2b_1\alpha\gamma'+2b_1\alpha'\gamma & 2b_1 p\gamma-2b_1 r\alpha & a''_2\alpha q & 0 \end{vmatrix}=0,$$

équation où le terme du septième degré est

$$x^7(a''_2 b'' b''_1-2b_1 b'' b'_2)\,b' b''_1 b'_2 a.$$

Si b_1 et b_2 sont nuls, suppression opérée de $a''_2\alpha$, on a

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 0 & \beta & \beta' & q \\ a''_2 & 0 & \gamma & \gamma' & r \\ \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ \beta' & \beta & 0 & q & 0 \end{vmatrix}=0,$$

ce qui peut se réduire à

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & p \\ \beta & \beta' & q \\ -\gamma(\alpha\beta'-\beta\alpha') & -\gamma'(\alpha\beta'-\alpha'\beta)+a''_2(-p\beta+q\alpha) & -r(\alpha\beta'-\beta\alpha') \end{vmatrix}=0.$$

Soient enfin les trois équations

$$\begin{aligned} &\alpha y+\alpha' z+p=0,\\ &a'_1 y^2+2b_1 yz+\beta y+\beta' z+q=0,\\ &a''_2 z^2+2b_2 yz+\gamma y+\gamma' z+r=0, \end{aligned}$$

au cas de $a'_1 a''_2 \gtrless 0$.

Multiplions la première par $a'_1 y$, et dans le produit remplaçons $a'_1 y^2$ par sa valeur tirée de la seconde; nous aurons

$$(-2b_1\alpha + a'_1\alpha')yz + (-\alpha\beta + pa'_1)y - \alpha\beta' z - \alpha q = 0.$$

En multipliant la même équation par $a''_2 z$, et tenant compte de la valeur de $a''_2 z^2$, on a

$$(-2b_2\alpha' + a''_2\alpha)yz - \alpha'\gamma y + (-\alpha'\gamma' + a''_2 p)z - \alpha' r = 0.$$

En prenant yz pour facteur, on obtient d'abord

$$\alpha y^2 z + \alpha' y z^2 + pyz = 0.$$

Mais on a, par les deux autres équations,

$$\begin{aligned} a'_1 y^2 z + 2b_1 y z^2 + \beta yz + \beta' z^2 + qz &= 0,\\ 2b_2 y^2 z + a''_2 y z^2 + \gamma y^2 + \gamma' yz + ry &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} (a'_1 a''_2 - 2b_1\, 2b_2)y^2 z + (\beta a''_2 - 2b_1\gamma')yz - 2b_1\gamma y^2 &\\ + a''_2\beta' z^2 - 2b_1 ry + a''_2 qz &= 0,\\ (a'_1 a''_2 - 2b_1\, 2b_2)yz^2 + (a'_1\gamma' - 2b_2\beta)yz + a'_1\gamma y^2 &\\ - 2b_2\beta' z^2 + a'_1 ry - 2b_2 qz &= 0. \end{aligned}$$

L'élimination de $y^2 z$ et yz^2 conduit à

$$\begin{aligned} &\Big[\alpha(a''_2\beta - 2b_1\gamma') + \alpha'(a'_1\gamma' - 2b_2\beta') - (a'_1 a''_2 - 2b_1\, 2b_2)p \\ &\qquad - \frac{2b_1}{a'_1}\gamma(-2b_1\alpha + a'_1\alpha') - \frac{2b_2}{a''_2}\beta'(-2b_2\alpha' + a''_2\alpha)\Big]yz \\ &+ \Big[(-2b_1\alpha + a'_1\alpha')r - \frac{\beta}{a'_1}\gamma(-2b_1\alpha + a'_1\alpha') \\ &\qquad - \frac{\beta'}{a''_2}\gamma(-2b_2\alpha' + a''_2\alpha)\Big]y \\ &+ \Big[(-2b_2\alpha' + a''_2\alpha)q - \frac{\beta'}{a'_1}\gamma(-2b_1\alpha + a'_1\alpha') \\ &\qquad - \frac{\beta'}{a''_2}\gamma'(-2b_2\alpha' + a''_2\alpha)\Big]z \\ &\qquad - \frac{\gamma}{a'_1}q(-2b_1\alpha + a'_1\alpha') - \frac{\beta'}{a''_2}r(-2b_2\alpha' + a''_2\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Par les quatre équations en yz, y et z ainsi obtenues, on a pour équation résultante

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha' & p \\ u_1 & u_2 & u'_1 & u'_2 \\ v_1 & v'_1 & v_2 & v'_2 \\ w_2 & w'_2 & w''_2 & w'''_2 \end{vmatrix} = 0,$$

en posant

$$u_1 = -2b_1\alpha + a'_1\alpha', \quad u_2 = -\alpha\beta + a'_1 p, \quad u'_1 = -\alpha\beta', \quad u'_2 = -\alpha q,$$

$$v_1 = -2b_2\alpha' + a''_2\alpha, \quad v'_1 = -\alpha'\gamma, \quad v_2 = -\alpha'\gamma' + a''_2 p, \quad v'_2 = -\alpha' r,$$

$$\begin{aligned} w_2 = &-(a'_1 a''_2 - 2b_1 2b_2)p + (a''_2\beta - 2b_1\gamma')\alpha \\ &+ (a'_1\gamma' - 2b_2\beta')\alpha' - \frac{2b_1}{a'_1}\gamma u_1 - \frac{2b_2}{a''_2}\beta' v_1, \end{aligned}$$

$$w'_2 = u_1 r - \gamma\left(\frac{u_1}{a'_1}\beta + \frac{v_1}{a''_2}\beta'\right),$$

$$w''_2 = v_1 q - \beta'\left(\frac{u_1}{a'_1}\gamma + \frac{v_1}{a''_2}\gamma'\right),$$

$$w'''_2 = -\frac{u_1}{a'_1}\gamma q - \frac{v_1}{a''_2}\beta' r.$$

Les termes en x^8 dans l'équation ne proviennent que de $pu_2 v_2 w_2$; leur ensemble est

$$\begin{aligned} x^8 a(-4b''b''_1 + aa'_1)(-4b'b'_2 + aa''_2) \\ \times\Big[&-a(a'_1 a''_2 - 2b_1 2b_2) \\ &+ 2b'(a'_1 2b'_2 - 2b_2 2b''_1) + 2b''(a''_2 2b''_1 - 2b_1 2b'_2) \\ &- \frac{2b_1}{a'_1}2c'_2(-2b_1 2b'' + a'_1 2b') - \frac{2b_2}{a''_2}2c''_1(-2b_2 2b' + a''_2 2b')\Big]. \end{aligned}$$

On aura y et z, en général du moins, par

$$\alpha y + \alpha' z + p = 0,$$

$$\begin{aligned} [(-\alpha\beta + pa'_1)v_1 + \alpha'\gamma u_1]y + [-\alpha\beta' v_1 - (-\alpha'\gamma' + pa''_2)u_1]z \\ - \alpha q v_1 + \alpha' r u_1 = 0. \end{aligned}$$

Les circonstances de discussion seraient analogues à celles que nous avons présentées dans la première Partie, mais avec plus de complication.