BULLETIN DE LA S. M. F.

HAAG

Note sur les relations entre les éléments caractéristiques d'une courbe gauche et les accélérations du point qui la décrit

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 140-143
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__140_1>

Note sur les relations entre les éléments caractéristiques d'une courbe gauche et les accélérations du point qui la décrit; par M. Haag.

(Séance du 9 mai 1879.)

Lorsqu'un point mobile décrit une trajectoire, il est clair qu'il doit exister des relations entre les éléments géométriques qui caractérisent cette trajectoire et les accélérations de divers ordres du point qui la décrit. En effet, la connaissance de ces accélérations entraîne celle de la courbe, et par suite celle des éléments géométriques qui, comme la tangente, le plan osculateur et le rayon de courbure, servent à la caractériser en chacun de ses points.

J'ai donné ces relations pour le cas des courbes planes dans les feuilles autographiées du *Cours de Géométrie* commencé à l'École polytechnique de Bordeaux en 1870. Depuis, dans une Note insérée aux *Annales de l'École Normale* (année 1874, p. 147), M. Bouquet a développé une méthode analytique permettant de calculer ces mêmes relations pour les courbes gauches. Je reviens aujourd'hui sur la question pour montrer que le calcul géométrique très-simple par lequel j'étais arrivé au résultat dans le cas des courbes planes peut s'étendre sans difficulté aux courbes à double courbure.

Considérons en un point m de la courbe gauche le trièdre trirectangle formé par la tangente mt dirigée dans le sens du déplacement sur la courbe, la normale principale mn dirigée vers le centre de courbure, et la binormale mp dirigée vers le centre de cambrure, c'est-à-dire du côté du plan osculateur où est situé le centre de la sphère osculatrice.

Désignons par $d\alpha$ l'angle de contingence et par $d\theta$ l'angle de torsion correspondant à l'arc élémentaire ds. Désignons encore par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ les coefficients différentiels $\frac{d\alpha}{ds}$, $\frac{d\theta}{ds}$ et leurs dérivées respectives par rapport à l'arc, et par v la vitesse $\frac{ds}{dt}$ du point mobile.

Enfin, appelons T, N et P des grandeurs géométriques égales à l'unité portées dans les trois directions mt, mn et mp précédemment définies.

Il est facile de reconnaître qu'on a

$$
(1) \quad \left\{
\begin{aligned}
d\mathrm{T} &= \mathrm{N}\,d\alpha = \mathrm{N} v\alpha_1\,dt,\\
d\mathrm{N} &= -\mathrm{T}\,d\alpha + \mathrm{P}\,d\theta = (-\mathrm{T} v\alpha_1 + \mathrm{P} v\theta_1)\,dt,\\
d\mathrm{P} &= -\mathrm{N}\,d\theta = -\mathrm{N} v\theta_1\,dt.
\end{aligned}
\right.
$$

Cela posé, si u est le rayon vecteur du point mobile m, la grandeur géométrique de sa vitesse sera

$$
(2) \qquad \frac{du}{dt} = v\mathrm{T},
$$

et les différentiations successives de ce produit fourniront sans difficulté les accélérations d'ordres successifs du point mobile. Ainsi,

$$
(3) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dt^2} &= \frac{dv}{dt}\mathrm{T} + v^2\alpha_1\mathrm{N},\\
\frac{d^3u}{dt^3} &= \left(\frac{d^2v}{dt^2} - v^3\alpha_1^2\right)\mathrm{T} + \left(3v\frac{dv}{dt}\alpha_1 + v^3\alpha_2\right)\mathrm{N} + v^3\alpha_1\theta_1\mathrm{P},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Sans pousser plus loin les calculs, on voit parfaitement quelle est la marche à suivre pour obtenir l'expression générale de l'accélération d'ordre n au moyen des fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \theta_1, \theta_2, \ldots$ qui caractérisent géométriquement la courbe.

Pour achever de résoudre la question proposée, il reste à trouver les relations qui lient ces fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \theta_1, \theta_2, \ldots$ aux éléments géométriques d'une nature différente qui ont été adoptés jusqu'ici dans l'étude générale des courbes gauches.

Ces relations s'établissent sans aucune difficulté. Par exemple, en désignant par ρ et r les rayons de courbure et de cambrure, on a immédiatement

$$\alpha_1 = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho},$$

$$\theta_1 = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}.$$

Soit maintenant R le rayon de la sphère osculatrice ; d'après une relation connue,

$$R^2 = \rho^2 + r^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2,$$

et, comme $\dfrac{d\rho}{ds} = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} = -\rho^2\alpha_2$,

$$R^2 = \rho^2 + \rho^4 r^2 \alpha_2^2,$$

d'où

$$\alpha_2 = \pm\frac{\sqrt{R^2 - \rho^2}}{\rho^2 r} = \pm\frac{h}{\rho^2 r},$$

en désignant par h la grandeur positive de la perpendiculaire abaissée du centre ω de la sphère osculatrice sur le plan osculateur à la courbe ; il est facile de s'assurer d'ailleurs que c'est le signe — qui doit être adopté devant la valeur de α_2.

Le mode de formation des équations (3) permet d'énoncer le théorème suivant :

Lorsqu'un point mobile décrit une courbe gauche, si sa vitesse et ses n premières accélérations sont données, son accélération d'ordre $n+1$ a son extrémité située sur une parallèle à la tangente et son accélération d'ordre $n+2$ a son extrémité située dans un plan parallèle au plan osculateur.

Cette proposition est l'analogue, pour les courbes gauches, d'un théorème que nous avons précédemment démontré sur les surfaces (*Bulletin*, t. V, p. 166).

Terminons enfin par une remarque relative à l'expression de la suraccélération. Si dans cette expression on suppose v constant, et si l'on remplace α_1, α_2 et θ_1 par leurs valeurs, on trouve

$$\frac{d^3 u}{dt^3} = -\frac{v^3}{\rho^2}\mathrm{T} - \frac{v^3 h}{\rho^2 r}\mathrm{N} + \frac{v^3}{\rho r}\mathrm{P},$$

et la valeur des composantes dirigées suivant la normale et la perpendiculaire au plan osculateur fait voir que leur résultante partielle est dirigée suivant la perpendiculaire au rayon $m\omega$ de la sphère osculatrice. Il en résulte que, *dans le mouvement uniforme d'un point sur une courbe gauche, la suraccélération est située dans le plan tangent à la sphère osculatrice,* propriété qui a quelque analogie avec celle de l'accélération, dirigée suivant la normale principale dans le mouvement uniforme ([1]).

([1]) Il est facile de s'assurer par le calcul algébrique de l'exactitude de ce dernier résultat. En effet, rapportons le point mobile décrivant la courbe à des coordonnées ayant leur origine au centre de la sphère osculatrice; la quantité

$$x^2 + y^2 + z^2,$$

étant constante pendant trois éléments de temps consécutifs, pourra être trois fois différentiée comme telle, et, si l'on observe, dans ces différentiations, que

$$dx^2 + dy^2 + dz^2$$

est aussi constant parce que la vitesse est uniforme, on arrive à la relation

$$dx\, d^2 x + dy\, d^2 y + dz\, d^2 z = 0,$$

qui exprime précisément le résultat ci-dessus énoncé.