BULLETIN DE LA S. M. F.

C. W. BORCHARDT

Sur un système de trois équations différentielles totales qui définissent la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 124-128

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__124_0>

Sur un système de trois équations différentielles totales qui définissent la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments; par M. C.-W. Borchardt.

(Séance du 25 avril 1879.)

La moyenne arithmético-géométrique de deux éléments a, b est une fonction de ces éléments qui satisfait, comme on sait, à l'équation

$$f\left[\frac{1}{2}(a+b),\ \sqrt{ab}\right]=f(a,b).$$

En partant de cette équation, j'ai montré, dans un travail inséré au tome 58 de mon *Journal*, que la moyenne arithmético-géométrique de deux éléments peut être définie par une équation différentielle ordinaire du premier ordre et du second degré par rapport à la variable dépendante, résultat que M. Bertrand a trouvé digne de faire entrer dans son grand Ouvrage sur le Calcul infinitésimal.

Dans mes études sur la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments, j'ai tâché de trouver une définition analogue de cette nouvelle transcendante. Le résultat que j'ai trouvé ne présente pas encore toute la simplicité que j'aurais désirée, et, dans la Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin* (séance du 2 novembre 1876), je me suis même contenté d'en indiquer seulement la forme générale, sans donner les formules dans leur détail.

Mais comme, dans un sujet nouveau, un résultat sûr, ne fût-ce même pas dans sa forme définitive, peut être utile pour des recherches ultérieures, j'espère qu'il ne sera pas sans intérêt pour la Société de connaître le système d'équations différentielles tel que je l'ai trouvé.

Soient a, b, c, e quatre éléments positifs rangés dans leur ordre décroissant et qui satisfont à l'inégalité

$$ae - bc > 0;$$

Soient

$$\mathfrak{a} = a + b + c + e,$$
$$\mathfrak{b} = a + b - c - e,$$
$$\mathfrak{c} = a - b + c - e,$$
$$\mathfrak{e} = a - b - c + e,$$

$$2b' = \sqrt{\mathfrak{ab}} + \sqrt{\mathfrak{ce}}, \quad 2b'' = \sqrt{\mathfrak{ab}} - \sqrt{\mathfrak{ce}},$$
$$2c' = \sqrt{\mathfrak{ac}} + \sqrt{\mathfrak{be}}, \quad 2c'' = \sqrt{\mathfrak{ac}} - \sqrt{\mathfrak{be}},$$
$$2e' = \sqrt{\mathfrak{ae}} + \sqrt{\mathfrak{bc}}, \quad 2e'' = \sqrt{\mathfrak{ae}} - \sqrt{\mathfrak{bc}},$$

toutes les racines étant prises avec le signe positif, et soit g la limite commune à laquelle on est conduit en appliquant un nombre indéfini de fois l'algorithme

$$a_1 = \frac{1}{4}(a + b + c + e),$$
$$b_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{ce}),$$
$$c_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{ac} + \sqrt{be}),$$
$$e_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{ae} + \sqrt{bc}).$$

Cela posé, il s'agit de définir la limite g par des équations différentielles.

Je choisirai comme variables indépendantes les trois quantités

$$p = \frac{eb''}{cb'}, \quad q = \frac{bc''}{ec'}, \quad r = \frac{ce''}{be'}.$$

En posant

$$p' = 1 - q + qr, \quad q' = 1 - r + rp, \quad r' = 1 - p + pq,$$

je déduirai de p, q, r les expressions rationnelles

$$p_0 = \frac{1 - q.1 - r}{p'}, \quad q_0 = \frac{1 - r.1 - p}{q'}, \quad r_0 = \frac{1 - p.1 - q}{r'},$$
$$p_1 = \frac{pp'}{p_0 q' r'}, \quad q_1 = \frac{qq'}{q_0 r' p'}, \quad r_1 = \frac{rr'}{r_0 p' q'}.$$

Comme variables dépendantes, j'introduirai trois quantités s, t, u qui dérivent de la transcendante g au moyen de différentiations partielles, et que l'on définit de la manière la plus simple par une seule équation différentielle totale :

$$2d\log\frac{g}{a} = sp_0\frac{dp}{p} + tq_0\frac{dq}{q} + ur_0\frac{dr}{r}.$$

Cela posé, les différentielles ds, dt, du s'expriment en fonctions linéaires de dp, dq, dr et du second ordre en s, t, u.

Pour plus de simplicité, je poserai

$$p_0\frac{dp}{p} = \delta p, \qquad q_0\frac{dq}{q} = \delta q, \qquad r_0\frac{dr}{r} = \delta r,$$

$$p_0 p_1\frac{dp}{p} = \delta_1 p, \quad q_0 q_1\frac{dq}{q} = \delta_1 q, \quad r_0 r_1\frac{dr}{r} = \delta_1 r,$$

$$d\log(p_0 q_0 r_0) = \Delta,$$

$$s - t - u = 2s_1, \qquad -s + t - u = 2t_1, \qquad -s - t + u = 2u_1.$$

Alors les équations différentielles qui définissent s, t, u peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
0 &= 2ds + \Delta . s + (q_1 + r_1)\delta_1 p + (p_1 + s)\delta_1 q + (p_1 - s)\delta_1 r - \mathrm{S},\\
0 &= 2dt + \Delta . t + (q_1 - t)\delta_1 p + (p_1 + r_1)\delta_1 q + (q_1 + t)\delta_1 r - \mathrm{T},\\
0 &= 2du + \Delta . u + (r_1 + u)\delta_1 p + (r_1 - u)\delta_1 q + (p_1 + q_1)\delta_1 r - \mathrm{U},
\end{aligned}$$

S, T, U désignant les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S} &= s^2\delta p + u_1^2\delta q + t_1^2\delta r,\\
\mathrm{T} &= u_1^2\delta p + t^2\delta q + s_1^2\delta r,\\
\mathrm{U} &= t_1^2\delta p + s_1^2\delta q + u^2\delta r.
\end{aligned}$$

En choisissant s_1, t_1, u_1 comme variables dépendantes, les équations différentielles prennent la forme

$$\begin{aligned}
0 &= 2ds_1 + \Delta . s_1 - (s_1 + t_1 + r_1)\delta q_1 + (s_1 - q_1 + u_1)\delta r_1 + \mathrm{S}_1,\\
0 &= 2dt_1 + \Delta . t_1 - (p_1 + t_1 + u_1)\delta r_1 + (s_1 + t_1 - r_1)\delta p_1 + \mathrm{T}_1,\\
0 &= 2du_1 + \Delta . u_1 - (s_1 + q_1 + u_1)\delta p_1 + (-p_1 + t_1 + u_1)\delta q_1 + \mathrm{U}_1,
\end{aligned}$$

S_1, T_1, U_1 désignant les expressions

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_1 &= -t_1 u_1\delta p + s_1(s_1 + u_1)\delta q + s_1(s_1 + t_1)\delta r,\\
\mathrm{T}_1 &= t_1(t_1 + u_1)\delta p - s_1 u_1\delta q + t_1(s_1 + t_1)\delta r,\\
\mathrm{U}_1 &= u_1(t_1 + u_1)\delta p + u_1(s_1 + u_1)\delta q - s_1 t_1\delta r.
\end{aligned}$$

Ce système de trois équations différentielles totales présente dans sa forme une analogie remarquable avec l'équation différentielle unique qui définit la moyenne arithmético-géométrique de deux éléments. Les variables indépendantes p, q, r ne sont pas les seules pour lesquelles on trouve un système d'équations différentielles semblable à celui que l'on vient de proposer, et c'est, comme je l'espère, un autre choix de variables indépendantes qui conduira à un système plus simple d'équations différentielles.

Le système proposé d'équations différentielles totales, étant intégré, donne des expressions qui contiennent des constantes arbitraires. Concevons que l'on ait donné à ces constantes les valeurs particulières qu'elles prennent dans le cas où g est la moyenne arithmético-géométrique des éléments a, b, c, e.

Dans ce cas, les équations différentielles proposées s'intègrent par des séries ordonnées suivant les puissances et produits de puissances ascendantes de $1-p$, $1-q$, $1-r$, et qui convergent, lorsque chacune de ces différences est plus petite que l'unité, ce que l'on démontre aisément en introduisant dans l'intégrale double (¹) par laquelle j'ai défini la moyenne arithmético-géométrique de a, b, c, e les quantités p, q, r.

En négligeant, dans ce développement, les termes du second ordre et des ordres supérieurs, on obtient

$$\frac{a}{g} = 1,$$

c'est-à-dire que, dans ce développement, il n'y a point de termes du premier ordre, ce qui suffit pour déterminer les valeurs que prennent dans le cas dont il s'agit les constantes de l'intégration.

De ce qui précède il résulte que l'on peut développer suivant les puissances et produits de puissances de $1-p$, $1-q$, $1-r$ la transcendante $\frac{a}{g}$, en se servant, pour le calcul des coefficients, des équations différentielles données plus haut.

Je terminerai cette Note en indiquant, à cause de sa simplicité,

---

(¹) Voir *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1878, p. 96 (Classe mathématique).

le résultat auquel on parvient pour les termes du second ordre, qui sont

$$\frac{1}{4}(1-q)(1-r)+\frac{1}{4}(1-p)(1-r)+\frac{1}{4}(1-p)(1-q).$$