Bulletin de la S. M. F.

A. Mannheim

Démonstrations géométriques d'un théorème relatif aux surfaces réglées

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 7-9
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__7_1>

Démonstrations géométriques d'un théorème relatif aux surfaces réglées; par M. A. Mannheim.

(Séance du 21 novembre 1877.)

Le théorème que je me propose de démontrer est le suivant, dû à M. O. Bonnet, et qu'il énonce ainsi [1] :

Une ligne tracée sur une surface gauche, qui coupe sous un angle constant les génératrices rectilignes de la surface et qui est en même temps ligne géodésique, ne peut être que la ligne de striction.

Appelons (G) la surface réglée, G une génératrice, et a le point où cette droite est rencontrée par la ligne géodésique (a). Menons en a et par la droite G le plan normal à (G); menons aussi en ce point le plan normal (A) à (a). Ces deux plans forment un dièdre dont l'arête est la normale en a à (G), et qui, par hypothèse, est de grandeur constante, quel que soit le point de la courbe (a) qu'on considère.

Déplaçons infiniment peu ce dièdre, de façon que a reste toujours sur (a) et que ses faces soient toujours normales à (G) et à (a). La caractéristique de la face (A), étant perpendiculaire au plan osculateur de (a), est perpendiculaire à l'arête du dièdre. Il en est alors de même pour la caractéristique de la face qui contient G. Cette caractéristique rencontre G à l'infini, et, comme ce point de ren-

(1) Voir *Journal de l'École Polytechnique,* XXXIIe Cahier, p. 71.

contre est le point où cette face du dièdre touche (G), on voit qu'elle est tangente à (G) à l'infini. Le plan mené par G, et qui est perpendiculaire à cette face, est alors le plan central; comme ce plan touche (G) en a, ce point est le point central sur G. Le point a étant arbitraire sur (a), tous les points de cette courbe jouissent de la même propriété, et (a) est alors la ligne de striction de (G).

Le théorème est ainsi démontré.

Il est facile de construire une surface réglée sur laquelle on a une ligne géodésique rencontrant les génératrices sous des angles égaux.

Prenons pour cela une courbe arbitraire (a), et par un quelconque de ses points menons le plan rectifiant. Dans ce plan et à partir de a, traçons une droite G faisant, avec la tangente at à (a), un angle donné. En répétant cette construction pour tous les points de (a), le lieu des droites G ainsi construites est la surface (G) demandée.

On peut dire que cette surface (G) est le lieu engendré par l'un des côtés G d'un angle mobile (G, at) de grandeur invariable, dont le plan est constamment perpendiculaire au plan osculateur d'une courbe donnée (a) et dont l'un des côtés at touche toujours cette courbe au sommet a de l'angle mobile.

En partant de cette génération, nous allons démontrer le théorème précédent, en faisant usage de cette propriété : Les plans centraux des surfaces engendrées par les côtés d'un angle mobile de grandeur invariable et le plan perpendiculaire au plan de cet angle, mené par la caractéristique de ce plan, sont parallèles à l'axe du déplacement.

Pour la surface engendrée par la tangente at, le plan central se confond avec le plan de l'angle mobile. Ce plan coupe alors le plan normal au plan de cet angle mené par sa caractéristique suivant cette droite même. Le plan de cette caractéristique et du côté G qui, d'après le théorème que je viens d'énoncer, est le plan central de (G), est donc le plan de l'angle lui-même, c'est-à-dire le plan qui touche (G) en a. Par suite a est le point central sur (G), et (a) est la ligne de striction de cette surface.

On démontre aussi simplement ces deux théorèmes, dus aussi à M. O. Bonnet :

Si la ligne de striction coupe, sous un angle constant, les génératrices rectilignes d'une surface gauche, cette ligne de striction est une ligne géodésique de cette surface.

Si la ligne de striction d'une surface gauche est en même temps une ligne géodésique, elle coupe sous le même angle toutes les génératrices rectilignes de cette surface.
